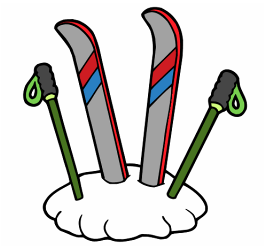
ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com



Devoir Maison n°7

Solution

Exercice 1 - D'après EDHEC 1999

Pour tout réel a, on considère la fonction f_a, définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_a(x,y) = \left(1 + y + xy + ax^2\right) e^y.$$

Partie I - Étude des extrema de f_a

Dans cette partie, on suppose $a \neq 0$ et $a \neq -\dfrac{1}{2}$

(1) La fonction $(x,y) \mapsto 1 + y + xy + ax^2$ est polynomiale et donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. La fonction coordonnée $(x,y) \mapsto y$ l'est également, et par composition avec la fonction exponentielle (de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$), la fonction $(x,y) \mapsto e^y$ est aussi $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Ainsi, par produit, f_a est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(2) (a) On applique les formules de dérivation.

$$\begin{array}{rcl} \partial_1 f_a(x,y) & = & (y + 2ax)e^y \\ & & \\ \partial_2 f_a(x,y) & = & (1+x)e^y + (1 + y + xy + ax^2)e^y \\ & = & (2 + x + y + xy + ax^2)e^y \end{array}$$

(b) Par définition

$$\begin{array}{rcl} (x,y) \text{ point critique de } f_a & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_1 f_a(x,y) & = & 0 \\ \partial_2 f_a(x,y) & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} y + 2ax & = & 0 \\ 2 + x + y + xy + ax^2 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -2ax \\ 2 + x - 2ax - 2ax^2 + ax^2 & = & 0 \end{array} \right. \\ & \Longleftrightarrow & \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & -2ax \\ 2 + (1-2a)x - ax^2 & = & 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Afin de résoudre l'équation $2+(1-2a)x-ax^2=0$, on calcule le discriminant du polynôme du second degré en présence, $\Delta=(1-2a)^2+8a=(1+2a)^2$. Ainsi, on a deux solutions pour x

$$x=\frac{-(1-2a)+(1+2a)}{-2a}=-2, \qquad \text{ou} \qquad x=\frac{-(1-2a)-(1+2a)}{-2a}=\frac{1}{a}.$$

Au final,

$$(x,y) \text{ point critique de } f_a \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2 \\ y &=& 4a \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1/a \\ y &=& -2 \end{array}\right.$$

et f_a possède deux points critiques dont les coordonnées sont

$$\left(\frac{1}{a},-2\right), \quad \text{et} \quad (-2,4a).$$

(3) On dérive à nouveau. Observons que, comme f_a est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, le théorème de Schwarz assure l'égalité des dérivées partielles *croisées* d'ordre 2, *i.e.*, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\partial^2_{1,2}f_a(x,y)=\partial^2_{2,1}f_a(x,y)$. Les formules de dérivation donnent

$$\begin{array}{rcl} \partial^2_1 f_a(x,y) &=& 2ae^y \\ \\ \partial^2_{1,2}f_a(x,y) &=& \partial^2_{2,1}f_a(x,y) \\ &=& (1+y+2ax)e^y \\ \\ \partial^2_2 f_a(x,y) &=& (1+x+2+x+y+xy+ax^2)e^y \\ &=& (3+2x+y+xy+ax^2)e^y \end{array}$$

(4) Si λ_1 et λ_2 sont les racines d'un trinôme de la forme x^2-sx+p alors, par factorisation par $(x-\lambda_i)$ - $i=1,2$ - le coefficient de degré 2 étant égal à 1, on a, pour tout x réel

$$x^2-sx+p=(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)=x^2-(\lambda_1+\lambda_2)x+\lambda_1\lambda_2.$$

Par identification, on a bien

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+\lambda_2 &=& s \\ \lambda_1\lambda_2 &=& p \end{array}\right.$$

(5) (a) On forme la matrice en chacun des deux points critiques. On a d'après les calculs des dérivées partielles d'ordre 2

$$\nabla^2 f_a(-2,4a)=e^{4a}\begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=e^{4a}H_1.$$

Le signe des valeurs propres de $\nabla^2 f_a(-2,4a)$ (qui permet de conclure à la présence d'un éventuel extremum en $(-2,4a)$ est le même que celui de celles de la matrice H_1. Notant λ_1 et λ_2 les valeurs propres de H_1, celles-ci sont solutions de l'équation

$$\begin{array}{rcl} \det(H_1-xI)=0 &\iff& (2a-x)(-1-x)-1=0 \\ &\iff& x^2-(2a-1)x+(-1-2a)=0. \end{array}$$

D'après la question précédente, les valeurs propres de H_1 vérifient donc les équations du système

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda_1+\lambda_2 &=& 2a-1 \\ \lambda_1\lambda_2 &=& -(1+2a) \end{array}\right.$$

Afin de présenter un extremum en $(-2,4a)$, les valeurs propres doivent être non nulles et de même signe ou encore leur produit doit être strictement positif. Or

$$\lambda_1\lambda_2 > 0 \iff 1+2a < 0 \iff a < -\frac{1}{2}.$$

Dans ce cas, on a donc un extremum. Le signe de la somme des deux valeurs propres donne ensuite le signe des deux valeurs propres (car elles sont de même signe et non nulles). Mais, si $a < -(1/2)$, alors $2a-1<0$ et celles-ci sont donc toutes deux négatives et f_a présente alors un maximum local en $(-2,4a)$.

On fait la même chose pour le second point critique, à commencer par la hessienne

$$\nabla^2 f_a\left(\frac{1}{a},-2\right) = e^{-2}\begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 1+\frac{1}{a}\end{pmatrix} = e^{-2}H_2.$$

Les valeurs propres μ_1 et μ_2 de H_2 vérifient

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mu_1+\mu_2 & = & \dfrac{2a^2+a+1}{a} \\ \mu_1\mu_2 & = & 2a+1 \end{array}\right.$$

Il y aura donc un extremum si et seulement si $2a+1>0$ ou encore $a>-1/2$. Dans ce cas, c'est le signe de $\mu_1+\mu_2$ qui en précise la nature. Celui-ci étant déterminé par le signe de a (car le numérateur est toujours strictement positif à cause de son discriminant strictement négatif), on aura donc un maximum local si $a\in]-1/2;0[$ et un minimum local si $a\in]0,+\infty[$.

(b) La question précédente nous permet de faire le bilan et de distinguer en effet 3 cas:

- Si $a<-\frac{1}{2}$, f_a présente un maximum local en $(-2,4a)$, celui-ci vaut
$$f_a(-2,4a) = e^{4a}.$$
- Si $-\frac{1}{2}<a<0$, f_a présente aussi un maximum local, mais cette fois en $(1/a,-2)$, celui-ci vaut
$$f_a\left(\frac{1}{a},-2\right) = -\left(\frac{1}{a}+1\right)e^{-2}$$
- Si $a>0$, f_a présente au point précédent un minimum local, qui vaut encore
$$f_a\left(\frac{1}{a},-2\right) = -\left(\frac{1}{a}+1\right)e^{-2}.$$

Partie II - Étude d'un fonction définie à l'aide de f_a

(1) (a) Cette intégrale est impropre en $-\infty$. Soit alors $A\le x$. On a

$$\int_A^x e^y\mathrm{d}y = [e^y]_A^x = e^x - e^A \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} e^x.$$

Ainsi, l'intégrale converge et vaut e^x.

(b) Soient $x\in\mathbb{R}$ et $A\le x$. En posant $u(y)=y$ et $v(y)=e^y$ (qui sont toutes deux de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[A;x]$), une intégration par parties - qui est ainsi licite - donne

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_A^x ye^y\mathrm{d}y & = & \displaystyle[ye^y]_A^x - \int_A^x e^y\mathrm{d}y \\ & = & xe^x - Ae^A - e^x + e^A \\ & \underset{A\to-\infty}{\longrightarrow} & (x-1)e^x \end{array}$$

où la limite est obtenue par croissance comparée. Ainsi, l'intégrale converge et vaut $(x-1)e^x$.

(2) (a) Observons que

$$f_a(x,y) = (1+ax^2)e^y + (1+x)ye^y$$

est donc combinaison linéaire des deux fonctions e^y et ye^y dont on vient de montrer la convergence des intégrales sur $]-\infty; x]$ aux questions précédentes. Par linéarité, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{x} f_a(x,y)\mathrm{d}y$$

est bien convergente et définit bien une fonction $F_a(x)$. De plus, on a

$$\begin{aligned} F_a(x) &= \int_{-\infty}^{x} f_a(x,y)\mathrm{d}y \\ &= (1+ax^2)\int_{-\infty}^{x} e^y\mathrm{d}y + (1+x)\int_{-\infty}^{x} ye^y\mathrm{d}y \\ &= (1+ax^2)e^x + (1+x)(x-1)e^x \\ &= (1+a)x^2e^x. \end{aligned}$$

(b) L'expression obtenue ci-dessus pour $F_a(x)$ permet de voir que F_a est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^1$. Sa dérivée vaut

$$F_a'(x) = (1+a)x(x+2)e^x$$

dont on obtient, dans chacun des trois cas précisés, facilement le signe, puis les variations de F_a.

- Si $a = -1$, F_{-1} est constante égale à 0;
- Si $a < -1$, on peut dresser le tableau ci-dessous

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$F_a'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
F_a	0	↘	$4(1+a)e^{-2}$	↗	0	↘	$-\infty$

- Si $a > -1$, on peut dresser le tableau ci-dessous

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$F_a'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
F_a	0	↗	$4(1+a)e^{-2}$	↘	0	↗	$+\infty$

Exercice 2

E désigne l'espace des fonctions polynômes à coefficients réels, dont le degré est inférieur ou égal à 2.

Partie I - Étude d'un endomorphisme de E.

On considère l'application f qui, à tout élément P de E, associe la fonction polynôme Q telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad Q(x) = (x-1)\,P'(x) + P(x)$$

et $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de E définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x \quad \text{et} \quad P_2(x) = x^2.$$

(1) Pour montrer que f est un endomorphisme de E, on vérifie d'abord que f est bien linéaire. En effet, si P et R sont deux polynômes de E et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(P+\lambda R) &= (X-1)[P+\lambda R]' + (P+\lambda R) \\ &= (X_1)(P'+\lambda R') + P + \lambda R \\ &= (X-1)P' + P + \lambda[(X-1)R' + R] \\ &= f(P) + \lambda f(R), \end{aligned}$$

ce qu'on voulait. Une considération sur les degrés permet de voir que, si $P \in E$, alors $f(P) \in E$. En effet, le produit de polynômes est encore un polynômes. De plus, si $\deg(P) \leq 2$, alors $\deg(P') \leq 1$ et donc $\deg((X-1)P') \leq 2$ puis $\deg((X-1)P' + P) \leq 2$ et $f(P) \in E$.

(2) Il s'agit de calculer les images par f des vecteurs de la base canonique.

$$f(P_0) = (X-1)\cdot 0 + P_0 = P_0$$

$$\begin{aligned} f(P_1) &= (X-1)\cdot 1 + P_1 = X - 1 + X \\ &= 2X - 1 \\ &= 2P_1 - P_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(P_2) &= (X-1)\cdot 2X + P_2 = (X-1)\cdot 2X + X^2 \\ &= 3X^2 - 2X \\ &= 3P_2 - 2P_1 \end{aligned}$$

et on a bien la matrice A proposée.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(3) La matrice A représente f dans la base canonique; elle est triangulaire supérieure: ses valeurs propres (qui sont celles de f) sont ses éléments diagonaux. Ainsi

$$\mathrm{S}p(f) = \{1; 2; 3\}.$$

f admet trois valeurs propres distinctes; c'est un endomorphisme défini sur un espace de dimension 3, il est donc diagonalisable. Par ailleurs, 0 n'étant pas valeur propre, f est bijectif ou autrement dit, c'est un automorphisme de E.

(4) On calcule

$$\begin{aligned} f(R_0) &= f(P_0) = p_0 = R_0 \\ f(R_1) &= (X-1)\cdot 1 + (X-1) = 2(X-1) = 2R_1 \\ f(R_2) &= (X-1)\cdot 2(X-1) + (X-1)^2 = 3(X-1)^2 = 3R_2 \end{aligned}$$

(5) D'après le calcul précédent, les trois vecteurs R_0, R_1, R_2 sont des vecteurs propres de f respectivement associés aux valeurs propres $1, 2$ et 3. Par concaténation des sous-espaces propres, la famille (R_0, R_1, R_2) est libre. Étant de formée de 3 vecteurs dans un espace de dimension 3, elle forme une base de E. La matrice de passage de la base canonique dans cette nouvelle base est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comme il s'agit d'une base de vecteurs propres, on a immédiatement d'après les calculs précédents

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(6) On vérifie les relations données, qui nous permettent d'exprimer les coordonnées des vecteurs de la base canonique dans cette nouvelle base et de former la matrice P^{-1}:

$$\begin{aligned} R_2(X) + 2R_1(X) + R_0(X) &= (X-1)^2 + 2(X-1) + 1 \\ &= X^2 - 2X + 1 + 2X - 2 + 1 = X^2 \\ &= P_2(X) \end{aligned}$$

$$R_1(X) + R_0(X) = (X-1) + 1 = X = P_1(X)$$

Comme $P_0 = R_0$, on a donc

$$P^{-1} = P_{\mathcal{B}' \to \mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(7) Comme $A = PDP^{-1}$, on a

$$A^{-1} = \left(PDP^{-1}\right)^{-1} = \left(P^{-1}\right)^{-1} D^{-1} P^{-1} = PD^{-1}P^{-1}.$$

La récurrence demandée est immédiate: si, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, la formule est vraie alors,

$$\begin{aligned} \left(A^{-1}\right)^{n+1} &= A^{-1} \cdot \left(A^{-1}\right)^n \\ &= PD^{-1}P^{-1} \cdot P\left(D^{-1}\right)^n P^{-1} \\ &= PD^{-1}P\left(D^{-1}\right)^n P^{-1} \\ &= P\left(D^{-1}\right)^{n+1} P^{-1}. \end{aligned}$$

Il est facile d'inverser D (c'est une matrice diagonale), ainsi que de calculer les puissances successives. En effet,

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad \left(D^{-1}\right)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/3)^n \end{pmatrix}$$

Ainsi, ne faisant que les calculs qui nous permettent d'obtenir la troisième colonne et représentant par $*$ les autres coefficients,

$$\begin{aligned}
\left(A^{-1}\right)^n &= \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & (1/2)^n & 0\\ 0 & 0 & (1/3)^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}* & * & 1\\ * & * & (1/2)^{n-1}\\ * & * & (1/3)^n\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}* & * & 1-(1/2)^{n-1}+(1/3)^n\\ * & * & (1/2)^{n-1}-2(1/3)^n\\ * & * & (1/3)^n\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Partie II - Suite d'épreuves aléatoires.

On dispose d'une urne qui contient trois boules numérotées de 0 à 2.

On s'intéresse à une suite d'épreuves définies de la manière suivante :

- La première épreuve consiste à choisir au hasard une boule dans cette urne.
- Si j est le numéro de la boule tirée, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est strictement supérieur à j, le tirage suivant se faisant alors dans l'urne ne contenant plus que les boules numérotées de 0 à j.

(1) Lorsque l'on commence, il y a une boule de chaque. Ainsi,

$$P(X_1 = 0) = P(X_1 = 1) = P(X_1 = 2) = \frac{1}{3},$$

et $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1;3 \rrbracket)$. Pour X_2, on utilise la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{(X_1 = i) :\ i = 1, 2, 3\}$. Remarquant que

- $P_{X_1=0}(X_2 = 0) = 1$: si on tira la boule 0, on enlève les deux autres boules, rendant certaine l'obtention de la boule 0 au tirage d'après;
- $P_{X_1=1}(X_2 = 0) = P_{X_1=1}(X_2 = 0) = 1/2$: si on tire la boule 1, il ne reste au tirage d'après que les boules 0 et 1, toutes deux sortant alors avec probabilité 1/2;
- $P_{X_1=2}(X_2 = 0) = P_{X_1=2}(X_2 = 1) = P_{X_1=2}(X_2 = 2)1/3$: si on tire la boule 2, rien ne change et les trois boules sont équiprobables pour la suite.

Il suit que

$$\begin{aligned}
P(X_2 = 0) &= P_{X_1=0}(X_2 = 0)P(X_1 = 0) + P_{X_1=1}(X_2 = 0)P(X_1 = 1) + P_{X_1=2}(X_2 = 0)P(X_1 = 2)\\
&= 1\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{11}{6}\\
&= \frac{11}{18}
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} P(X_2=1) &= P_{X_1=0}(X_2=1)P(X_1=0)+P_{X_1=1}(X_2=1)P(X_1=1)+P_{X_1=2}(X_2=1)P(X_1=2) \\ &= 0\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{6} \\ &= \frac{5}{18} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(X_2=2) &= P_{X_1=0}(X_2=2)P(X_1=0)+P_{X_1=1}(X_2=2)P(X_1=1)+P_{X_1=2}(X_2=2)P(X_1=2) \\ &= 0\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{9} \end{aligned}$$

(On vérifie qu'on a bien $11/18+5/18+1/9=1$.) De plus

$$E(X_2)=0\cdot\frac{11}{18}+1\cdot\frac{5}{18}+2\cdot\frac{2}{18}=\frac{9}{18}=\frac{1}{2}.$$

et

$$V(X_2)=E(X_2^2)-E(X_2)^2=1^2\cdot\frac{5}{18}+2^2\cdot\frac{2}{18}-\frac{1}{4}=\frac{17}{36}.$$

(2) Par la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e $\{(X_k=i):\ i=0,1,2\}$ et en utilisant les mêmes probabilités conditionnelles *de transition* que précédemment, on obtient

$$\begin{aligned} P(X_{k+1}=0) &= P_{X_k=0}(X_{k+1}=0)P(X_k=0)+P_{X_k=1}(X_{k+1}=0)P(X_k=1)+P_{X_k=2}(X_{k+1}=0)P(X_k=2) \\ &= P(X_k=0)+\frac{1}{2}P(X_k=1)+\frac{1}{3}P(X_k=2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_{k+1}=1) &= P_{X_k=0}(X_{k+1}=1)P(X_k=0)+P_{X_k=1}(X_{k+1}=1)P(X_k=1)+P_{X_k=2}(X_{k+1}=1)P(X_k=2) \\ &= \frac{1}{2}P(X_k=1)+\frac{1}{3}P(X_k=2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_{k+1}=2) &= P_{X_k=0}(X_{k+1}=2)P(X_k=0)+P_{X_k=1}(X_{k+1}=2)P(X_k=1)+P_{X_k=2}(X_{k+1}=2)P(X_k=2) \\ &= \frac{1}{3}P(X_k=2) \end{aligned}$$

ou encore

$$U_{k+1}=\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 0 & 1/2 & 1/3\\ 0 & 0 & 1/3\end{pmatrix}U_k=A^{-1}U_k$$

(3) Une récurrence immédiate permet d'écrire alors

$$U_k=\left(A^{-1}\right)^kU_0=\left(A^{-1}\right)^k\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

(4) Le calcul de $(A^{-1})\,k$ appliqué à U_0 (dont seule la troisième composante est non nulle est vaut 1) donne alors la troisième colonne de $\left(A^{-1}\right)^k$. Le monde est bien fait, on l'a déjà calculé. Plus précisément,

$$U_k=\begin{pmatrix}P\left[X_k=0\right]\\ P\left[X_k=1\right]\\ P\left[X_k=2\right]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-(1/2)^{n-1}+(1/3)^n\\ (1/2)^{n-1}-2(1/3)^n\\ (1/3)^n\end{pmatrix}$$

Comme $|1/2| < 1$ et $|1/3| < 1$, on a bien $(1/2)^{n-1} \to 0$ et $(1/3)^n \to 0$ (lorsque $n \to +\infty$) ce qui donne bien

$$\lim_{k\to+\infty} P[X_k = 0] = 1, \qquad \lim_{k\to+\infty} P[X_k = 1] = 0, \qquad \lim_{k\to+\infty} P[X_k = 2] = 0.$$

(5) On complètee le programme `SciLab` en n'oubliant de prendre la transposée de A^{-1} pour M et de rajouter l'état initial $X_0 = 2$ en dernier argument du `grand()` mais aussi en ligne 4, sinon la trajectoire commence avec X_1.

```
n=input('n=?')
M=[1, 0, 0; 1/2, 1/2, 1/3; 1/3, 1/3, 1/3]
X=grand(n, 'markov', M, 2)
X=[2, X]
plot2d(0:n, X, -1)
```