Devoir Surveillé de rentrée

Solution

Exercice 1 - D'après EML 2001

On considère la fonction $f\ : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout x de $[0;+\infty[$, par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x-1}, & \text{si } x>0 \\ 1, & \text{si } x=0 \end{cases}$$

(1) (a) En dehors de 0 (c'est à dire sur $]0;+\infty[$, f est continue comme quotient de fonctions usuelles continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Il faut vérifier, pour la continuité en 0, que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1} = f(0) = 1.$$

Or, on reconnait l'inverse d'une limite usuelle

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \Longleftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x-1} = 1$$

Ainsi, f est bien continue sur $[0;+\infty[$.

(b) Sur $]0;+\infty[$, f est de classe $\mathcal{C}^1$ comme quotient de deux telles fonctions usuelles sont le dénominateur ne s'annule pas. Les formules de dérivation donnent

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x-1-xe^x}{(e^x-1)^2} \\ &= \frac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2}. \end{aligned}$$

(c) La partie polynominale du DL à l'ordre 1 en 0 est donnée par l'équation de la tangente en 0, on a bien évidemment

$$e^x = 1+x+o(x).$$

Le reste de ce DL se précise pour obtenir le DL d'ordre 2 dont on a besoin ci après

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2).$$

(d) On injecte le DL à l'ordre 2 ci-dessous dans l'expression de la dérivée de f obtenue deux questions plus haut. A noter qu'au dénominateur, qui fait apparaître un carré, on a besoin seulement du DL à l'ordre 1

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(1-x)e^x - 1}{(e^x-1)^2} \\ &= \frac{(1-x)(1+x+x^2/2+o(x^2))-1}{(x+o(x)-1)^2} \\ &= \frac{-x^2/2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} \\ &= \frac{-1/2+o(1)}{1+o(1)} \\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

et on trouve bien la limite attendue.

(e) Pour montrer que f est bien $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$, il faut vérifier que f est bien dérivable en 0 (via limite de son taux d'accroissement) et que cette limite est bien égale à celle obtenue pour $f'(x)$, soit $-1/2$. On utilise une fois de plus le DL d'ordre 2. A noter qu'au dénominateur on a seulement besoin du DL à l'ordre 1 car l'expression se trouve multipliée par x.

$$\begin{aligned} \frac{f(x)-f(0)}{x} &= \frac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x} \\ &= \frac{x-e^x+1}{x(e^x-1)} \\ &= \frac{x-1-x-x^2/2+o(x^2)+1}{x(1+x+o(x)-1)} \\ &= \frac{-x^2/2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} \\ &= \frac{-1/2+o(1)}{1+o(1)} \\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, f est bien dérivable en 0, $f'(0) = -1/2$ et f' est continue en 0 donc f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0;+\infty[$.

(2) (a) Comme précédemment, f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ comme quotient de deux telles fonctions usuelles dont le dénominateur ne s'annule pas.Pour tout $x>0$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-xe^x(1-e^x)^2-((1-x)e^x-1)2e^x(1-e^x)}{(1-e^x)^4} \\ &= \frac{-xe^x(e^x-1)-2e^x((1-x)e^x-1)}{(e^x-1)^3} \\ &= \frac{-xe^{2x}+xe^x-2e^{2x}+2xe^{2x}+2e^x}{(e^x-1)^3} \\ &= \frac{e^x}{(e^x-1)^3}(xe^x-2e^x+x+2). \end{aligned}$$

(b) La fonction g définie par

$$g:\ x\in[0;+\infty[\longmapsto xe^x-2e^x+x+2.$$

apparaît au numérateur de $f''(x)$. C'est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0;+\infty[$, et on a

$$g'(x) = (x-1)e^x + 1.$$

Il faut hélas dériver g une fois de plus. On trouve

$$g''(x) = xe^x$$

ce qui permet enfin de dresser le(s) tableau(x) de variations! On observe que $g'(0) = g(0) = 0$.

x	0		$+\infty$
$g''(x)$	0	$+$	
g'	0	$\nearrow$	$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
g	0	$\nearrow$	$+\infty$
$g(x)$	0	$+$	

(c) En déduire que

$$\forall x \in]0;+\infty[, \quad f''(x) > 0.$$

(d) Comme un calcul précédent donne, pour $x > 0$,

$$f''(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x-1)^3},$$

la dernière ligne du tableau précédent permet de voir que $f''(x) > 0$ pour tout $x > 0$. On en déduit les variations de f' puis celles de f. Par croissance comparée,

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-xe^x}{e^{2x}} = 0$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

x	0		$+\infty$
$f''(x)$	$\|\|$	$+$	
f'	$-1/2$	$\nearrow$	0
$f'(x)$		$-$	
f	1	$\searrow$	0

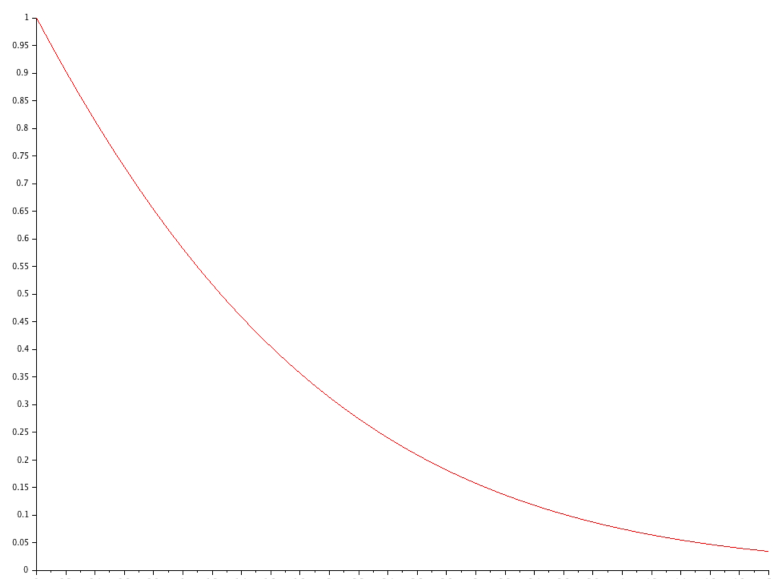
(e) On fait alors un joli dessin. Celui fourni ci-dessous est obtenu avec `SciLab` et on ne resiste pas au plaisir d'en joindre les commandes.

```
--> function y=f(x); if x==0 then; y=1; else; y=x/(exp(x)-1); end; endfunction

--> X=0:.01:5;

--> Y=feval(X, f);

--> plot2d(X,Y, style=5)
```



(3) On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 0, \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

(a) Le tableau ci dessus donne toutes les informations demandées, à savoir, pour tout $x \geq 0$

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad 0 \leq f(x) \leq 1.$$

(b) Soit $x \in]0;+\infty[$ (en particulier $x \neq 0$). Comme $f(0) = 1 \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{x}{e^x - 1} = x \\ &\iff \frac{1}{e^x - 1} = 1 \\ &\iff 1 = e^x - 1 \\ &\iff e^x = 2 \\ &\iff x = \ln(2). \end{aligned}$$

(c) Afin d'appliquer l'inégalité des accroissements finis à f sur $[0;1]$, il faut vérifier que tous les termes de la suite (u_n) sont bien dans l'intervalle. C'est une récurrence immédiate. En effet, $u_0 = 0 \in [0;1]$, et comme $f(x) \in [0;1]$ si $x \geq 0$, en prenant $x = u_n$, on a bien $u_{n+1} = f(u_n) \in [0;1]$ si $u_n \in [0;1]$. Comme f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$, que $\ln(2) \in [0;1]$ et que $|f'(x)| \leq 1/2$ si $x \in [0;1]$, l'IAF donne

$$|u_{n+1} - \ln(2)| = |f(u_n) - f(\ln(2))| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)|,$$

ce qu'on voulait.

(d) Une récurrence permet alors d'obtenir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \ln(2)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

En effet, c'est vrai pour $n = 0$ ($|u_0 - \ln(2)| \leq 1$) et si c'est vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors par la question précédente

$$|u_{n+1} - \ln(2)| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

On en déduit, par le théorème des gendarmes que la suite converge vers $\ln(2)$

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ln(2).$$

(e) Ce type de programme est ultra-classique et finalement on a même pas besoin de calculer les termes de la suite...

```
N=0;
while (1/2)^N >10^(-5)
    N=N+1
end
disp(N)
```

Une autre version, basée sur la résolution de l'inéquation $(1/2)^N \leq 10^{-5}$, serait

```
N=floor(5*log(10)/log(2)) +1;
disp(N)
```

Exercice 2 - D'après EDHEC 2015

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ la base canonique de $\mathbb{R}^5$. On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(1) (a) Les quatre dernières colonnes de la matrices C étant les mêmes, on peut tout de suite écrire que

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5;\ e_1 + e_5\right).$$

Ces deux vecteurs - qui engendrent l'image de f - étant clairement non colinéaires, ils forment une base de l'image de f qui est donc de dimension 2. Ainsi $e_1 + e_5$ est dans l'image et

$$e_2 + e_3 + e_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 - (e_1 + e_5) \in \operatorname{Im}(f).$$

Ces deux vecteurs étant des éléments de l'image de f et étant à nouveau non colinéaires, ils forment également une base de l'image car celle-ci est de dimension 2.

(b) D'après le théorème du rang, on peut déduire que la dimension de $\operatorname{Ker}(f)$ est égale à $5-2 = 3$. Pour en déterminer une base, on résout l'équation $f(u) = 0$.

$$u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(f) \iff \begin{cases} x + y + z + t + w & = & 0 \\ x & = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x & = & 0 \\ w & = & -(y+z+t) \end{cases}$$

$$\iff u = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \\ t \\ -(y+z+t) \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$\operatorname{Ker}(f) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

Les trois vecteurs ci-dessus, que l'on note respectivement $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ forment une famille libre (c'est immédiat) et engendrent le noyau de f. Ils en forment donc une base, que l'on note $\mathcal{K}$.

(2) On note $u = e_2 + e_3 + e_4$ et $v = e_1 + e_5$.

(a) On utilise la linéarité de f et la valeurs des images des vecteurs de la base canonique à partir des colonnes de C.

$$\begin{aligned} f(u) &= f(e_2 + e_3 + e_4) = f(e_2) + f(e_3) + f(e_4) \\ &= e_1 + e_5 + e_1 + e_5 + e_1 + e_5 = 3(e_1 + e_5) \\ &= 3v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(v) &= f(e_1 + e_5) = f(e_1) + f(e_5) \\ &= e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_1 + e_5 = 2(e_1 + e_5) + e_2 + e_3 + e_4 \\ &= u + 2v \end{aligned}$$

Il suit que

$$\begin{aligned} f(u - v) &= f(u) - f(v) = 3v - (u + 2v) \\ &= v - u \\ &= -(u - v) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f(u + 3v) &= f(u) + 3f(v) = 3v + 3(u + 2v) \\ &= 3u + 9v \\ &= 3(u + 3v) \end{aligned}$$

(b) Il faut alors montrer que la famille

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

forme une base de $\mathbb{R}^5$. Cette famille étant composée de cinq vecteurs de $\mathbb{R}^5$, il suffit de montrer qu'elle est libre. Soient $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. On a

$$a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3 + d(u - v) + e(u + 3v) = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -d + 3e &=& 0 \\ a + d + e &=& 0 \\ b + d + e &=& 0 \\ c + d + e &=& 0 \\ -a - b - c - d + 3e &=& 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcl} a &=& 0 \\ b &=& 0 \\ c &=& 0 \\ d &=& 0 \\ e &=& 0 \end{array} \right.$$

Ainsi la famille est libre et forme bien une base de $\mathbb{R}^5$.

(c) Au vu des questions précédentes (les trois premiers vecteurs de $\mathcal{F}$ sont dans le noyau de f - donc leur image est nulle; $u - v$ est envoyé sur son opposé et $u + 3v$ sur trois fois lui même), on en déduit aisément que

$$D = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{K}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

De plus, notant

$$R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

il est clair que R est inversible (elle représente la matrice identité de la base $\mathcal{K}$ dans la base canonique; ou encore son image est de dimension 5 car les colonnes forment une base). Ainsi, plutôt que de calculer explicitement son inverse par Pivot de Gauss, on voit que l'égalité demandée est équivalente à $RD = CR$. Or,

$$RD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

et on a bien

$$CR = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

(3) (a) On fait le calcul

$$\begin{aligned} D(D+I)(D-3I) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(b) En développant la relation précédente on a

$$D(D+I)(D-3I) = 0 \Longleftrightarrow D^3 - 2D^2 - 3D = 0$$

En multipliant à droite par R^{-1} et à gauche par R on obtient

$$\begin{aligned} R\left(D^3 - 2D^2 - 3D\right)R^{-1} &= 0 \\ \Longleftrightarrow \quad RD^3R^{-1} - 2RD^2R^{-1} - 3RDR^{-1} &= 0 \\ \Longleftrightarrow \quad \left(RDR^{-1}\right)^3 - 2\left(RDR^{-1}\right)^2 - 3\left(RDR^{-1}\right) &= 0 \\ \Longleftrightarrow \quad C^3 - 2C^2 - 3C &= 0 \end{aligned}$$

et le polynôme P défini par $P(X) = X^3 - 2X^2 - 3X$ est bien un polynôme annulateur de C.

(4) On admet que (principe de la division euclidienne), pour tout entier naturel n non nul, il existe un unique polynôme Q_n et trois réels a_n, b_n et c_n tels que :

$$X^n = (X^3 - 2X^2 - 3X)Q_n(X) + a_nX^2 + b_nX + c_n$$

(a) En injectant les trois racines de P (qui sont 0, -1 et 3) dans l'équation de division euclidienne ci-dessus, on obtient

$$0 = c_n, \quad (-1)^n = a_n - b_n + c_n, \quad 3^n = 9a_n + 3b_n + c_n$$

On résout le système correspondant (sans difficulté, c'est finalement un système 2×2) pour obtenir

$$a_n = \frac{3^n + 3(-1)^n}{12}, \qquad b_n = \frac{3^n - 9(-1)^n}{12}, \qquad c_n = 0.$$

(b) D'après la question précédente, et comme $P(X)$ annule C (ou encore $P(C) = 0$) on obtient

$$C^n = a_nC^2 + b_nC = \frac{1}{12}\left((3^n + 3(-1)^n)\,C^2 + (3^n - 9(-1)^n)\,C\right).$$

Exercice 3 - D'après ECRICOME 2015

Dans tout cet exercice, N désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de deux urnes opaques U_1 et U_2, d'apparence identique et contenant chacune N boules indiscernables au toucher.
L'urne U_1 contient $(N-1)$ boules blanches et une boule noire.
L'urne U_2 contient N boules blanches.

I - Une première expérience aléatoire

On effectue des tirages **sans remise** dans l'urne U_1, jusqu'à l'obtention de la boule noire.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages nécessaires pour l'obtention de la boule noire.
On notera pour tout entier naturel i non nul :

- N_i l'événement "on tire une boule noire lors du i-ième tirage".
- B_i l'événement "on tire une boule blanche lors du i-ième tirage".

(1) La boule noire peut arriver dès le premier tirage. Elle peut, au pire, arriver au dernier tirage (le $N-$ième), une fois que les $N-1$ boules blanches ont été consécutivement retirées de l'urne. On a donc $X(\Omega) = [\![1; n]\!]$.

(2) On complète ce programme sans difficulté

```
function X=tirage(N)
    X=1;
    while rand()>1/N //tant qu'on a pas la boule noire
        X=X+1; //il faut un tirage de plus
        N=N-1; //il y a une boule (blanche) en moins dans l'urne
    end
endfunction
```

(3) On simule 10000 fois cette expérience aléatoire. Le vecteur `S` a pour composante `S(i)` le nombre de fois, sur les 10000 réalisations, que la fonction `tirage(N)` a renvoyé i.

```
N = input('N=?') ;
S = zeros(1,N);
for k = 1 : 10000
        i=tirage(N)
        S(i) = S(i)+1 //le nombre de simulations donnant X=i
augmente de 1
end
S=S/10000;
```

(4) Les fréquences d'apparition des valeurs entre 1 et 5 sont sensiblement les mêmes; on peut donc **conjecturer** que X suit une loi uniforme sur $[\![1;5]\!]$.

(5) La prise de valeur $X = k$ se traduit par des informations précises sur les k premiers tirages. On utilise la formule des probabilités composées pour passer aux probabilités.

$$P(X=1) = P(N_1) = \frac{1}{N}, \qquad P(X=2) = P(B_1 \cap N_2) = P_{B_1}(N_2)P(B_1) = \frac{1}{N-1} \times \frac{N-1}{N} = \frac{1}{N}$$

$$P(X=3) = P(B_1 \cap B_2 \cap N_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1\cap B_2}(N_3) = \frac{N_1}{N} \times \frac{N-2}{N-1} \times \frac{1}{N-2} = \frac{1}{N}.$$

(6) On généralise le calcul précédent pour bien vérifier qu'on obtient la formule correspondant à la loi uniforme pour $k \in [\![3;N]\!]$. Toujours avec la formule des probabilités composées

$$P(X=k) = P\left(\bigcap_{j=1}^{k-1} B_j \cap N_k\right) = \prod_{j=1}^{k-1} \frac{N-j}{N+1-j} \times \frac{1}{N-(k-1)} = \frac{1}{N}$$

et on a bien montré que

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1;N]\!]).$$

(7) Le nombre cherché est l'espérance de X. D'après le cours,

$$E(X) = \frac{N+1}{2}.$$

II - Une deuxième expérience aléatoire

On choisit une des deux urnes au hasard (chaque urne a la même probabilité d'être choisie) et on tire dans l'urne choisie une par une les boules **sans remise** jusqu'à être en mesure de pouvoir connaître l'urne choisie.
On note Y la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre de tirages ainsi effectués.
On note :

- C_1 l'événement "on choisit l'urne U_1".
- C_2 l'événement "on choisit l'urne U_2".

(1) Sachant qu'on tire dans l'urne U_1, on sera en mesure de déterminer qu'il s'agit bien de cette urne dès l'obtention de la boule noire. Ainsi, reprenant la variable X introduite dans la première partie, on a

$$P_{C_1}(Y=j) = P(X=j) = \frac{1}{N}.$$

(2) L'urne U_2 ne contient que des boules blanches. Tant que celle-ci n'est pas vide, on ne peut pas être certain qu'on ne va pas tirer de boule noire et qu'il ne s'agit pas de l'urne U_1. Ainsi,

$$P_{C_2}(Y=j) = \begin{cases} 0, & \text{si } 1 \leq j \leq N-1 \\ 1, & \text{si } j = N \end{cases}$$

(3) Par la formule des probabilités totales, appliquée au s.c.e $\{C_1, C_2\}$, on a

$$P(Y=N) = P_{C_1}(Y=N)P(C_1) + P_{C_2}(Y=N)P(C_2) = \frac{1}{N}\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{2N} + \frac{1}{2}.$$

Comme $P_{C_2}(Y=j) = 0$ si $1 \leq j \leq N-1$, la même formule des probabilités totales donne

$$P(Y=j) = P_{C_1}(Y=j)P(C_1) = \frac{1}{2N}.$$

Remarque. On vérifie bien (ce n'est pas nécessaire ni demandé) que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N} P(Y=j) &= \sum_{j=1}^{N-1} P(Y=j) + P(Y=N)\\ &= \sum_{j=1}^{N-1}\frac{1}{2N} + \frac{1}{2N} + \frac{1}{2}\\ &= \frac{N-1}{2N} + \frac{1}{2N} + \frac{1}{2}\\ &= 1.\end{aligned}$$

(4) C'est un calcul de somme

$$\begin{aligned}E(Y) &= \sum_{j=1}^{N} jP(Y=j)\\ &= \sum_{j=1}^{N-1} j\times\frac{1}{2N} + N\left(\frac{1}{2N}+\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2N}\times\frac{(N-1)N}{2} + \frac{1}{2} + \frac{N}{2}\\ &= \frac{N-1}{4} + \frac{N+1}{2}\\ &= \frac{3N+1}{4}.\end{aligned}$$

III - Une troisième expérience aléatoire

On effectue une succession infinie de tirages **avec remise** dans l'urne U_1. On admet qu'on obtient presque-sûrement au moins une boule blanche et au moins une boule noire lors de ces tirages.
On note T la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'obtention d'au moins une boule noire et d'au moins une boule blanche.

(1) $T(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$ car il faut au moins deux tirages pour avoir obtenu au moins une boule blanche et une boule noire.

(2) Soit $k \geqslant 2$.

$$P(T=k) = P(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{k-1} \cap N_k) + P(N_1 \cap N_2 \cap \ldots \cap N_{k-1} \cap B_k).$$

Or les tirages s'effectuent ici avec remise donc les événements B_i et N_j sont indépendants. Ainsi,

$$\begin{aligned}P(T=k) &= P(B_1)P(B_2)\ldots P(B_{k-1})P(B_k) + P(N_1)P(N_2)\ldots P(N_{k-1})P(B_k)\\ &= \left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1}\frac{1}{N} + \left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}\frac{N-1}{N}\end{aligned}.$$

(3) T admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(T=k)$ converge absolument autrement dit si et seulement si la série de terme général $kP(T=k)$ converge car T est à valeurs positives. Or,

$$kP(T=k) = \frac{1}{N}k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1}$$

On reconnaît ici des séries dérivées de séries géométriques qui convergent car

$$\left|\frac{1}{N}\right| < 1, \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{N-1}{N}\right| < 1.$$

Ainsi, T admet une espérance et

$$\begin{aligned}
E(T) &= \sum_{k=2}^{+\infty} kP(T=k) \\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{N-1}{N}\right)^{k-1} + \frac{N-1}{N}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{N}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{N}\left(\frac{1}{\left(1-\left(\frac{N-1}{N}\right)\right)^2} - 1\right) + \frac{N-1}{N}\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{N}\right)^2} - 1\right) \\
&= N - \frac{1}{N} + \frac{N}{N-1} - \frac{N-1}{N} \\
&= \frac{N^2}{N-1} - 1
\end{aligned}$$