Devoir Surveillé n°1

Durée: 4 heures

Questions de cours

(1) Montrer que la fonction f définie ci après se prolonge par continuité sur $]-1;+\infty[$, puis déterminer son développement limité à l'ordre 2 en 0, où

$$\forall x \in]-1;+\infty[\setminus\{0\}, \qquad f(x) = \frac{1-e^{x^2}}{\ln(1+x)}.$$

En déduire la dérivabilité en 0, l'équation de la tangente en ce point et la position relative de celle-ci par rapport à la courbe de f.

(2) Monter, à l'aide de développements limités usuels en 0, que

$$\sqrt{1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1+\frac{1}{2n}-\frac{3}{8n^2}.$$

Exercice 1

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{e^x+1} + nx$.

(1) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
(2) Déterminer un équivalent de $f_n(x)$ en $+\infty$, puis un équivalent en $-\infty$. En déduire les limites de $f_n(x)$ aux extrémités de son ensemble de définition ainsi que l'existence de deux asymptotes à la courbe représentative de f_n, dont on précisera les équations.
(3) Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion A_n et préciser l'équation de la tangente en ce point.
(4) Quel est le développement limité à l'ordre 2 de $f_n(x)$ au point d'inflexion?

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3).$$

(5) Expliciter les développements limités en 0 à l'ordre 3 de e^x et de $\dfrac{1}{1+x}$.

(6) En constatant que
$$\frac{1}{e^x+1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+\left(\frac{e^x-1}{2}\right)},$$
et en utilisant les deux développements limités précédents, obtenir le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $f_n(x)$.

(7) Représenter graphiquement sur un même graphique orthonormé la courbe représentative de f_1, sa tangente au point d'inflexion et ses asymptotes.

(8) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution, notée u_n.

(9) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $-\dfrac{1}{n} < u_n < 0$. En déduire la limite de (u_n).

(10) En revenant à la définition de u_n, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

Exercice 2

À tout couple (a,b) de deux réels, on associe la matrice $M(a,b)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par:
$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$
On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a,b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$. Ainsi $E = \{M(a,b)\ ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$.
On note $I = M(1,0)$ la matrice identité et A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$
Enfin, on note U, V et W les vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivants :
$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \ ; \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ ; \quad W = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) Montrer que E est un espace vectoriel.
(2) Donner une famille génératrice de E. Cette famille est-elle libre ?
(3) On note : $E_1(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,|\, AX = X\}$ et $E_2(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,|\, AX = 2X\}$.
  (a) Montrer que $E_1(A) = \text{Vect}(V,W)$. La famille (V,W) est-elle libre ?
  (b) Montrer que $E_2(A) = \text{Vect}(U)$. La famille (U) est-elle libre ?
  (c) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (U,V,W)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On note $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On admet qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible telle que les matrices A, P et D vérifient la relation :
$$D = P^{-1}AP.$$

(4) Prouver que la matrice $P^{-1}M(a,b)P$ est une matrice diagonale que l'on notera $D(a,b)$ et que l'on exprimera en fonction des matrices I et D.
(5) (a) Montrer que $M(a,b)$ est inversible si et seulement si $D(a,b)$ est inversible.
  (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur a et b pour que $M(a,b)$ soit inversible.

(6) (a) Prouver que $[M(a,b)]^2 = I$ si et seulement si $[D(a,b)]^2 = I$.
(b) En déduire l'existence de quatre matrices $M(a,b)$ que l'on déterminera, vérifiant $[M(a,b)]^2 = I$.

(7) Déterminer une matrice B telle que $B^2 = A$.
On exprimera B à l'aide de la matrice P et d'une matrice diagonale à déterminer que l'on explicitera.

Exercice 3

Partie 1 : Étude préliminaire

On **admet** que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1[$, la série $\sum_{n \geqslant k} \binom{n}{k} x^n$ est convergente et on note $s_k(x)$ sa somme :

$$s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n.$$

(1) Vérifier, pour tout réel x de $[0,1[$:

$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \qquad \text{et} \qquad s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

(2) Pour tout couple d'entiers naturels (n,k) tels que $n > k$, **montrer** :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

(3) Pour tout entier naturel k et pour tout réel x de $[0,1[$, déduire de la question précédente :

$$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x)$$

(4) Montrer par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1[, \quad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

Partie 2 : Étude d'une expérience aléatoire

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne). On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.

- Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise.

- On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

(1) Déterminer la loi de la variable aléatoire N. Donner son espérance.
(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que : $P_{[N=n]}(X=0) = \left(\frac{4}{5}\right)^n$.
(3) En déduire, en utilisant un système complet d'évènements associé à la variable N, vérifier que $P(X=0) = \frac{4}{9}$.

(4) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la probabilité conditionnelle $P_{[N=n]}(X = k)$.
On distinguera les cas $k \in [\![0; n]\!]$ et $k > n$.

(5) En déduire, en utilisant également l'étude préliminaire, que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = \frac{25}{36} \left(\frac{4}{9} \right)^k$$

(6) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et calculer $E(X)$.