ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir Surveillé n°1

Solution

Questions de cours

(1) On utilise les DL usuels de e^u, $\ln(1+u)$ et de $1/(1-u)$ en 0.

$$e^{u^2} = 1 + u^2 + \frac{u^4}{2} + o(u^4), \qquad \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2), \qquad \frac{1}{1-u} = 1 + u + o(u)$$

Donc, pour $x \neq 0$ dans un voisinage de 0,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1 - \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)}{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} \\ &= \frac{-x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)}{x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{-x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)}{1 - \frac{x}{2} + o(x)} \\ &= \left(-x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)\right) \times \frac{1}{1 - \left(\frac{x}{2} + o(x)\right)} \\ &= \left(-x + o(x^2)\right) \times \left(1 + \frac{x}{2} + o(x)\right) \\ &= -x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

En particulier,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0,$$

donc f se prolonge par continuité en posant $f(0) = 0$. Et f y est dérivable

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x} = -1 - \frac{x}{2} + o(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -1,$$

donc $f'(0) = -1$. La tangente à la courbe de f a donc pour équation $y = -x$ et comme, pour x proche de 0,

$$f(x) - (-x) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

quantité du signe de $-x^2/2$ au voisinage de 0, donc négative, il suit que la courbe est (localement) au dessous de sa tangente.

(2) On a rappelé plus haut le DL usuel de $\ln(1+u)$ en 0. On rappelle également ici celui de $\sqrt{1+u}$ dont on a besoin.

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + o(u^2).$$

Ainsi, comme $1/n \longrightarrow 0$, $n \to +\infty$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} &= \sqrt{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \\
&= 1+\frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)}{2} - \frac{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^2}{8} + o\left(\cdots\right) \\
&= 1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= 1+\frac{1}{2n}-\frac{3}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} 1+\frac{1}{2n}-\frac{3}{8n^2}.
\end{aligned}$$

Exercice 1 - D'après EDHEC 2008

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{e^x+1} + nx$.

(1) La fonction $x \mapsto e^x + 1$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule jamais (somme de fonctions usuelles $\mathcal{C}^\infty$), il en est de même pour son inverse. La fonction $x \mapsto nx$ est également $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (fonction affine). Ainsi, f_n est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. On pourra donc calculer ses dérivées successives, partout, sans le moindre souci, et ça fait plaisir.

(2) Comme $e^x + 1 \to +\infty$, $x \to +\infty$, on peut écrire

$$f_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} nx + o(1) \Longrightarrow f_n(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} nx.$$

En particulier, on en déduit que $f_n(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$. Attention, l'équivalent en $+\infty$ à une fonction affine ne donne pas nécessairement l'existence d'une asymptote, il faut que la différence entre $f_n(x)$ et la candidate asymptote tende vers 0 (sinon c'est une branche parabolique). Ici,

$$f_n(x) - nx = \frac{1}{e^x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donc $y = nx$ est bien asymptote à la courbe de f_n en $+\infty$.

En $-\infty$, on observe que $e^x + 1$ tend vers 1, donc

$$f_n(x) - (nx+1) = \frac{1}{e^x+1} - 1 \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui permet de déduire que $y = nx + 1$ est asymptote à la courbe en $-\infty$, que $f_n(x) \sim nx + 1$, $x \to -\infty$ et que $f_n(x) \to -\infty$, $x \to -\infty$.

(3) Les points d'inflexion de la courbe de f_n on pour abscisse les valeurs en lesquelles $f_n''(x)$ s'annule **en changeant de signe**. Il faut donc calculer les deux premières dérivées de f_n. C'est parti.

$$f_n'(x) = \frac{-e^x}{(e^x+1)^2} + n$$

$$\begin{aligned} f_n''(x) &= \frac{-e^x(e^x+1)^2 + 2e^x(e^x+1)e^x}{(e^x+1)^4} \\ &= \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3} \end{aligned}$$

Le tableau de signe de la dérivée seconde se dresse sans la moindre difficulté, la quantité étant du signe de $e^x - 1$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_n''(x)$		$-$	0	$+$	

Il y a donc un seul point d'inflexion, d'abscisse $x = 0$. Son ordonnée vaut $f_n(0) = 1/2$. Le point A_n a pour coordonnées $(0; 1/2)$. En ce point, la tangente à la courbe a pour équation $y = f_n'(0)x + f_n(0)$, c'est à dire

$$y = \left(n - \frac{1}{4}\right)x + \frac{1}{2}.$$

(4) L'équation de la tangente précédemment trouvée nous donne la *partie régulière* du DL à l'ordre 1, mais comme la dérivée seconde s'annule (point d'inflexion, n'oublions pas), on a immédiatement le DL à l'ordre 2, d'après la formule de Taylor-Young

$$f_n(x) = \frac{1}{2} + \left(n - \frac{1}{4}\right)x + o(x^2).$$

On admet la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 en 0 pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + o(x^3).$$

(5) Il faut dériver trois fois et évaluer les dérivées successives en 0. Aucune difficulté. On trouve

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3), \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3).$$

(6) C'est LA question un peu technique de l'exercice. Mais on s'en sort grâce à l'indication

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{e^x+1} + nx = \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{e^x-1}{2}\right)} + nx \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{x + x^2/2 + x^3/6 + o(x^3)}{2}} + nx \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)} + nx \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right) + \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)^2 \right. \\ &\qquad \left. - \left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{12} + o(x^3)\right)^3 + o(x^3)\right) + nx \end{aligned}$$

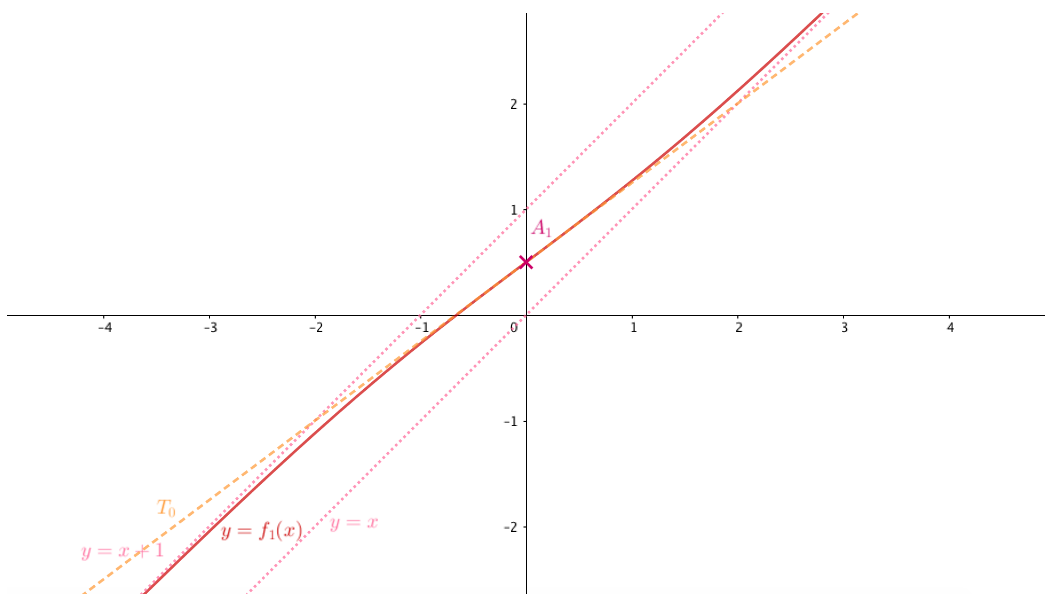
Il sort du terme à la puissance 3 seulement $x^3/8 + o(x^3)$. En revanche, il sort du terme à la puissance 2 un carré et un double produit, c'est à dire $x^2/4 + x^3/4 + o(x^3)$. Au final,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{8} + o(x^3)\right) + nx \\ &= \frac{1}{2} + \left(n - \frac{1}{4}\right)x + \frac{x^3}{48} + o(x^3). \end{aligned}$$

(7) Afin de représenter graphiquement f_1, on commence par dresser son tableau de variations, avec les résultats précédents.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1''(x)$		$-$	0	$+$	
f_1'	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1
$f_1'(x)$			$+$		
f_1	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

Les asymptotes ont pour équations $y = x$ (en $+\infty$) et $y = x + 1$ (en $-\infty$). La tangente en O a pour équation $y = (3/4)x + 1/2$. On fait apparaitre toutes ces informations sur un joli dessin.



(8) D'après l'étude précédente, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et strictement croissante. Par le théorème de bijection, elle en réalise une de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (d'après les limites précédemment trouvées). En particulier, 0 admet un unique antécédent par f_n, que l'on note u_n et on a bien le résultat demandé.

(9) Afin d'obtenir l'encadrement demandé, on compare les images par f_n et on conclut grâce à la stricte croissance de celle-ci. En effet, $f_n(0) = 1/2 > 0$, et $f_n(1/n) = 1/(1 + e^{-1/n}) - 1 < 0$ car $1 + e^{-1/n} > 1$. On a donc

$$f_n\left(-\frac{1}{n}\right) < f_n(u_n) = 0 < f_n(0)$$

et donc, par stricte croissance de f_n,

$$-\frac{1}{n} < u_n < 0.$$

En appliquant le théorème des gendarmes, on a immédiatement que $u_n \longrightarrow 0, n \to +\infty$.

(10) Par définition,

$$\frac{1}{1+e^{u_n}} + nu_n = 0 \Longleftrightarrow u_n = -\frac{1}{n\,(1+e^{u_n})}.$$

Or, $u_n \to 0$ donc $1 + e^{u_n} \to 2$, donc

$$\frac{1}{e^{u_n}+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$$

et, par produit d'équivalents,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n}.$$

Exercice 2 - D'après ECRICOME 2008

À tout couple (a, b) de deux réels, on associe la matrice $M(a, b)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par:

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On désigne par E l'ensemble des matrices $M(a, b)$ où a et b décrivent $\mathbb{R}$. Ainsi $E = \left\{M(a, b)\ ;\ (a, b) \in \mathbb{R}^2\right\}$. On note $I = M(1, 0)$ la matrice identité et A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on note U, V et W les vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivants :

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\ ;\quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ;\quad W = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(1) On remarque que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $M(a, b) = aI + bA$ donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} &E = \left\{M(a,b)\ ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ \text{donc}\ \ &E = \left\{aI + bA\ ;\ (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ \text{donc}\ \ &E = \mathrm{Vect}(I, A) \end{aligned}$$

Donc E est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille (I, A). Donc E est un espace vectoriel.

(2) D'après la question précédente, la famille (I, A) est une famille génératrice de E. De plus, cette famille est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires.

(3) On note : $E_1(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\,|\,AX = X\}$ et $E_2(A) = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\,|\,AX = 2X\}$.

(a) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$X \in E_1(A) \iff AX = X \iff \ldots\ldots \iff X = \begin{pmatrix} y+2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = yV + zW$$

Donc $E_1(A) = \text{Vect}(V, W)$. De plus, cette famille est libre car composée de deux vecteurs non colinéaires.

(b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$X \in E_2(A) \iff AX = 2X \iff \ldots\ldots \iff X = \begin{pmatrix} -z \\ -2 \\ z \end{pmatrix} = -zU$$

Donc $E_2(A) = \text{Vect}(U)$. De plus,cette famille est libre car composée d'un seul vecteur non nul.

(c) Montrons que la famille $\mathcal{B}' = (U, V, W)$ est libre dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On a :

$$\begin{aligned} aU + bV + cW = 0 &\iff \begin{pmatrix} a+b+2c \\ 2a+b \\ -a+c \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff \begin{cases} a+b+2c &= 0 \\ 2a+b &= 0 \\ -a+c &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} a &= 0 \\ b &= -2a \\ c &= a \end{cases} \iff a = b = c = 0 \end{aligned}$$

Donc la famille $\mathcal{B}' = (U, V, W)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

On note $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On admet qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible telle que les matrices A, P et D vérifient la relation :

$$D = P^{-1}AP.$$

(4) On a vu que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $M(a, b) = aI + bA$ donc on peut écrire :

$$D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P = P^{-1}(aI + bA)P = aP^{-1}IP + bP^{-1}AP = aI + bD$$

Ainsi, la matrice $D(a, b)$ est une matrice diagonale (car I et D le sont) et on a : $D(a, b) = aI + bD$.

(5) (a) On a : $D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P$ donc $M(a, b) = PD(a, b)P^{-1}$. Ainsi,

- Si $M(a, b)$ est inversible, alors $D(a, b) = P^{-1}M(a, b)P$ est inversible comme produit de matrices inversibles.
- Si $D(a, b)$ est inversible, alors $M(a, b) = PD(a, b)P^{-1}$ est inversible comme produit de matrices inversibles.

Finalement, $M(a, b)$ est inversible si et seulement si $D(a, b)$ est inversible.

(b)
- D'après la question précédente, $M(a,b)$ est inversible si et seulement si $D(a,b)$ est inversible.
- Or,
$$D(a,b) = \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}$$
est diagonale. Donc $D(a,b)$ est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls, donc si et seulement si $a+2b \neq 0$ et $a \neq b$.

Finalement, $M(a,b)$ est inversible si et seulement si $a+2b \neq 0$ et $a \neq b$.

(6) (a) On a :
$$\begin{aligned}
[M(a,b)]^2 = I &\iff [PM(a,b)P^{-1}]^2 = I \\
&\iff PM(a,b)P^{-1}PM(a,b)P^{-1} = I \\
&\iff PD(a,b)P^{-1}PD(a,b)P^{-1} = I \\
&\iff PD(a,b)^2P^{-1} = I \\
&\iff D(a,b)^2 = P^{-1}IP \\
&\iff D(a,b)^2 = I
\end{aligned}$$

(b) On a :
$$\begin{aligned}
D(a,b)^2 = I &\iff \begin{pmatrix} a+2b & 0 & 0 \\ 0 & a+b & 0 \\ 0 & 0 & a+b \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} (a+2b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (a+b)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (a+b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a+2b & = & 1 \\ a+b & = & 1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} a+2b & = & 1 \\ a+b & = & -1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} a+2b & = & -1 \\ a+b & = & 1 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} a+2b & = & -1 \\ a+b & = & -1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} (a+2b)^2 & = & 1 \\ (a+b)^2 & = & 1 \end{array}\right. \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -3 \\ b & = & 2 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 3 \\ b & = & -2 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -1 \\ b & = & 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Comme $[M(a,b)]^2 = I \iff D(a,b)^2 = I$, on a finalement :

$$\boxed{M(a,b)^2 = I \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 0 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -3 \\ b & = & 2 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 3 \\ b & = & -2 \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{rcl} a & = & -1 \\ b & = & 0 \end{array}\right.}$$

(7) Il s'agit de déterminer une matrice B vérifiant :
$$B^2 = PDP^{-1}$$
On va chercher la matrice B sous la forme $P\Delta P^{-1}$ de telle sorte que le carré donne PDP^{-1}.

On pose $\Delta = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de telle sorte que $\Delta^2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D$.

On pose alors $B = P\Delta P^{-1}$ ce qui donne :
$$B^2 = P\Delta P^{-1}P\Delta P^{-1} = P\Delta^2 P^{-1} = PDP^{-1} = A$$
ce qui montre que la matrice $B = P\Delta P^{-1}$ répond à la question.

Exercice 3 - D'après EML 2002

Partie 1 : Étude préliminaire

On **admet** que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1[$, la série $\sum_{n \geqslant k} \binom{n}{k} x^n$ est convergente et on note $s_k(x)$ sa somme :

$$s_k(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n.$$

(1) On a, en reconnaissant la somme de la série géométrique qui converge car $x \in [0,1[$:

$$s_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{0} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

On a, en reconnaissant la somme de la série géométrique dérivée qui converge car $x \in [0,1[$:

$$s_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n}{1} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = x \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Ainsi, pour tout réel x de $[0,1[$

$$s_0(x) = \frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad s_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

(2) Soit $n > k$. Alors, les coefficients binomiaux proposés sont bien définis et on a :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!(k+1) + n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n > k$, on a bien

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

(3) On a :

$$\begin{aligned}
s_{k+1}(x) &= \sum_{m=k+1}^{+\infty} \binom{m}{k+1} x^m \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n+1}{k+1} x^{n+1} \\
&= \binom{k+1}{k+1} x^{k+1} + x \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n+1}{k+1} x^n \\
&= \binom{k+1}{k+1} x^{k+1} + x \sum_{n=k+1}^{+\infty} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \right) x^n \qquad \text{d'après la question précédente.}
\end{aligned}$$

La formule est valable car dans cette dernière somme, $n > k$. On ne pouvait pas appliquer cette formule à la deuxième ligne car le premier terme est $n = k$.
On obtient donc, on remarquant que $\binom{k+1}{k+1} = \binom{k}{k} = 1$:

$$\begin{aligned}
s_{k+1}(x) &= \binom{k+1}{k+1} x^{k+1} + x \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n + x \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} x^n \\
&= x \binom{k}{k} x^k + x \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n + x \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} x^n \\
&= x \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n + x \sum_{n=k+1}^{+\infty} \binom{n}{k+1} x^n \\
&= x s_k(x) + x s_{k+1}(x)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout réel x de $[0,1[$

$$s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x).$$

(4) Pour $k \in \mathbb{N}$, on note : $\mathcal{P}(k) : \ \forall x \in [0,1[, \quad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.

- <u>initialisation:</u> D'après la Question (1), on a : $s_0(x) = \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{x^0}{(1-x)^1}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- <u>hérédité:</u> Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie. On a d'après la question précédente

  $$\forall x \in [0,1[, \qquad s_{k+1}(x) = x s_k(x) + x s_{k+1}(x),$$

  ce qui donne

  $$s_{k+1}(x) = \frac{x}{1-x} s_k(x)$$

  Or d'après l'hypothèse de récurrence, on a : $s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.
  On a donc :

  $$s_{k+1}(x) = \frac{x}{1-x} \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \frac{x^{k+1}}{(1-x)^{k+2}}$$

  donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, ou encore

$$\forall k \in \mathbb{N}, \ \forall x \in [0,1[, \quad s_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

Partie 2 : Étude d'une expérience aléatoire

On considère une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches. On effectue l'expérience aléatoire suivante :

- On commence par tirer des boules de l'urne une à une avec remise jusqu'à obtenir la boule noire (que l'on remet aussi dans l'urne). On définit la variable aléatoire N égale au nombre de tirages avec remise nécessaires pour obtenir la boule noire.
- Puis, si N prend une valeur entière positive non nulle notée n, on réalise alors une seconde série de n tirages dans l'urne, toujours avec remise.
- On définit la variable aléatoire X égale au nombre de fois où la boule noire a été obtenue dans cette seconde série de tirages.

(1) N est le temps d'attente du premier succès (obtenir une boule noire) de probabilité $p = 1/5$ lors d'une succession d'épreuves de Bernoulli (tirer une boule) identiques et indépendantes (tirage avec remise).
Donc $N \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{5}\right)$ et $E(N) = 5$.

(2) Sachant que $[N = n]$, l'évènement $(X = 0)$ signifie que l'on n'a obtenu aucune boule noire (de probabilité $p = 1/5$) lors de n tirages identiques et indépendantes (tirage avec remise). Ainsi,

$$P_{[N=n]}(X = 0) = P(B_1 \cap \cdots \cap B_n) = \left(\frac{4}{5}\right)^n.$$

(3) Comme $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$, la famille $(N = n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'évènements. On a donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P_{N=n}(X = 0)P(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n}{0} \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^{n-0} \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \frac{1}{5} \end{aligned}$$

car d'après la question précédente

$$P_{N=n}(X = 0) = \binom{n}{0} \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^{n-0}.$$

Seule la première formule est valable car $k = 0$ et $n \geq 1$. On a donc :

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} \frac{1}{5} \\ &= \frac{1}{5} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^{p+1} \left(\frac{4}{5}\right)^p \\ &= \frac{1}{5}\frac{4}{5} \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{16}{25}\right)^p = \frac{4}{25}\frac{1}{1-\frac{16}{25}} = \frac{4}{25}\frac{25}{9} = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

Finalement, $P(X = 0) = \frac{4}{9}$.

(4) Tout d'abord, on a : $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
Il est clair qu'on ne peut obtenir plus de boules noires que l'on fait de tirages, donc

$$P_{N=n}(X = k) = 0, \qquad \text{si} \quad k > n.$$

De plus, sachant que $[N = n]$, X compte le nombre de succès (obtenir une boule noire) de probabilité $p = 1/5$ lors de n épreuves de Bernoulli (tirer une boule) identiques et indépendantes (tirage avec remise).
Donc, **sachant** $[N = n]$, X suit une loi binomiale de paramètres n et p.
Ainsi, la loi conditionnelle de X sachant $[N = n]$ est :

$$P_{N=n}(X = k) = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

(5) Comme $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$, la famille $(N = n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forme un système complet d'évènements. On a donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P_{N=n}(X = k)P(N = n) \\ &= \sum_{n=1}^{k-1} 0 + \sum_{n=k}^{+\infty} P_{N=n}(X = k)P(N = n) \end{aligned}$$

car d'après la question précédente : $P_{N=n}(X = k) = 0$ si $n < k$. On a donc :

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{5}\right)^k\left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\frac{1}{5} \\ &= \left(\frac{1}{5}\right)^{k+1}\left(\frac{4}{5}\right)^{-k-1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{4}{5}\right)^n\left(\frac{4}{5}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{16}{25}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1} s_k\left(\frac{16}{25}\right) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\frac{\left(\frac{16}{25}\right)^k}{\left(1-\frac{16}{25}\right)^{k+1}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}\frac{\left(\frac{16}{25}\right)^k}{\left(\frac{9}{25}\right)^{k+1}} = \frac{1}{4}\frac{25}{9}\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{16}{25}\right)^k}{\left(\frac{9}{25}\right)^k} = \frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k \end{aligned}$$

Finalement,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(X = k) = \frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k.$$

(6) $E(X)$ existe si la série $\sum kP(X = k)$ converge absolument donc si elle converge car les termes sont positifs. On a :

$$\begin{aligned} kP(X = k) &= k\frac{25}{36}\left(\frac{4}{9}\right)^k \\ &= \frac{25}{36} \times \frac{4}{9} \times k\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

On reconnait une série géométrique dérivée qui converge car $0 < 4/9 < 1$ donc $E(X)$ existe et on a :

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{25}{81}\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1} \\ &= \frac{25}{81}\frac{1}{\left(1-\frac{4}{9}\right)^2} \\ &= \frac{25}{81}\left(\frac{9}{5}\right)^2 = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $E(X)$ existe et on a : $E(X) = 1$.