ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

## Devoir Surveillé n°2

*Lundi 12 Novembre 2018*
*Durée : 4 heures*

# Exercice 1

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et $I$ la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice $A$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices $M$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

**Partie A : Étude de la matrice $A$**

(1) Calculer les matrices $(A-I)^2$ et $(A-I)^3$.
(2) La matrice $A$ est-elle inversible ?

**Partie B : Recherche d'une solution particulière**

On note pour tout $x \in ]-1,1[, \varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

(4) Justifier que la fonction $\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$, et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.
(5) En utilisant la formule de Taylor-Young pour $\varphi$ en 0 à l'ordre 2, déterminer un réel $\alpha$ non nul tel que :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

(6) On note $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer $(P(x))^2$.
(7) Soit $C = A - I$. En utilisant les résultats de la Question 1, vérifier que $(P(C))^2 = A$.
Expliciter alors une matrice $M$ telle que $M^2 = A$.

**Partie C : Résolution complète de l'équation**

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit $f$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice $A$.

Dans cette partie, on pose: $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(8) Soient $u$, $v$ et $w$ les vecteurs définis par: $\begin{cases} w = (1, 0, 1), \\ v = f(w) - w, \\ u = f(v) - v. \end{cases}$
   (a) Calculer les vecteurs $v$ et $u$.
   (b) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer la matrice représentative de $f$ dans la base $\mathcal{B}'$.
   (d) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1}AP$.

(9) Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire alors que $N$ est de la forme :
$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$
   où $a, b$ et $c$ sont trois réels.
   (b) Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : $N_1$ et $N_2$.

(10) Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de $P, P^{-1}, N_1$ et $N_2$.

(11) L'ensemble $E$ des matrices $M$ appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel?

# Exercice 2

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec probabilité $p$.
On note $q = 1 - p$.
On dit que la première série est de longueur $n \geq 1$ si les $n$ premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ième l'autre côté. De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine au lancer précédant un changement de côté.

Par exemple si les lancers donnent les résultats $FFPPPPPPFFFPP\ldots$ alors la première série est de longueur 2 et la deuxième est de longueur 6.

Soient $X_1$ et $X_2$ les variables aléatoires égales aux longueurs de la première et deuxième série.

*La question 1 est indépendante de la suite de l'exercice.*

(1) (Simulation Informatique)
   (a) Recopier et compléter la fonction suivante, prenant en argument la probabilité $p$ d'obtenir pile et permettant de simuler la variable aléatoire $X_1$.

   *On rappelle que l'instruction* `grand(1,1, 'bin', n, p)` *permet de simuler une variable suivant la loi* $\mathcal{B}(n, p)$.

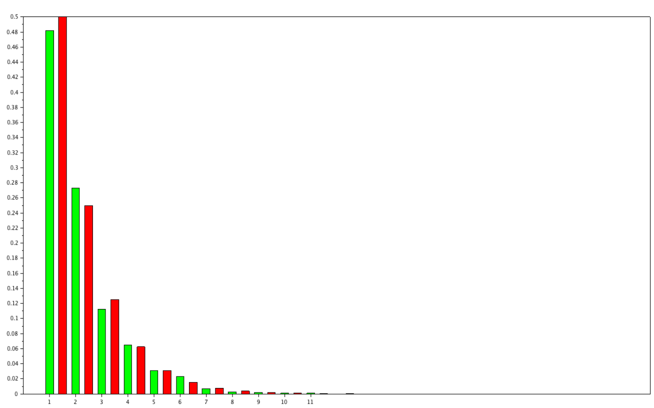
```
function X=DS3(p)
    X=1;
    told=grand(1,1,'bin', ....., .....)
    tnew=grand(1,1,'bin', ....., .....)
    while .............
        X=.................
        told=tnew;
        tnew=..............
    end
endfunction
```

(b) Écrire une fonction d'entête `function U=SampleX1(N,p)` permettant d'obtenir un $N-$échantillon de $X_1$, c'est à dire un vecteur ligne $U$ de taille $N$ dont chaque composante est une réalisation de la variable $X_1$.

(c) L'exécution du script suivant permet d'afficher le graphique ci-dessous. Interpréter.

```
U=SampleX1(1000,0.5)
T=tabul(U, 'i');

x=1:length(T);
G=(0.5)^x;
bar(x+.5, G, 0.3, 'red') //On décale de 0.5 pour afficher les bâtons en
parallèle
bar(T(:,1), T(:, 2)/1000, 0.3, 'green')
```



(2) Déterminer la loi de $X_1$.

(3) Montrer que $X_1$ admet une espérance et que $E(X_1) = \dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p}$.

(4) Déterminer la loi du couple $(X_1, X_2)$.

(5) En déduire la loi de $X_2$.

(6) Montrer que $X_2$ admet une espérance et que $E(X_2) = 2$.

(7) Montrer que $E(X_1X_2)$ existe et que $E(X_1X_2) = \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p}$.

(8) On suppose que $p = 1/2$. Montrer que $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes.

(9) On suppose que $p \neq 1/2$.

(a) En considérant $P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$ montrer que $X_1$ et $X_2$ ne sont pas indépendantes.

(b) Vérifier que $\operatorname{cov}(X_1, X_2) = 4 - \dfrac{1}{pq}$ puis en déduire une nouvelle preuve que $X_1$ et $X_2$ ne sont pas indépendantes.

# Exercice 3

Dans tout l'exercice, on considère

- La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par
$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2};$$
- La fonction $F$ définie sur $]-1;+\infty[$ par
$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t;$$
- La fonction $g$ définie sur $[-1;+\infty[$ par
$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(x+1)}, & \text{si } x \notin \{0;-1\} \\ 1, & \text{si } x = 0, \\ 0, & \text{si } x = -1 \end{cases}$$
- La suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

## Partie I - Étude de la fonction $f$

(1) Déterminer les limites de $f$ aux bornes de son ensemble de définition.
(2) Déterminer les variations de $f$, présentées sous forme d'un tableau.

## Partie II - Étude de la fonction $F$

(3) Justifier que $F(x)$ est bien définie pour tout $x > -1$ et que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.
(4) À l'aide du changement de variable $u = t+1$, montrer que, pour tout $x > -1$,
$$F(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}.$$
(5) Déterminer les limites de $F$ aux bornes de son ensemble de définition.
(6) (a) Étudier la concavité de $F$. On montrera notamment que $F$ admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.
(b) Montrer que, pour tout $x > -1$ non nul, $F(x) > 0$.

(7) Rappeler les développements limités d'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$ et de $1/(1+x)$. En déduire le développement limité de $F(x)$ à l'ordre 2 en 0.
(8) Préciser l'équation de la tangente à la courbe de $F$ en 0 et leurs positions relatives.
(9) Représenter l'allure de la courbe représentative de $F$ ainsi que, sur le même graphique, la tangente en 0.

## Partie III - Étude de la suite $(u_n)$

(10) Calculer $u_1$ et $u_2$.
(11) Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n}$.
(12) En déduire la convergence de $(u_n)$ vers une limite à préciser.

(13) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$2 \leq v_n \leq 2 + \frac{1}{n}.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2(n+1) \leq \frac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

(14) (a) Comparer, pour $k$ entier $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k}$ et $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

(b) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n).$$

(15) Montrer que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

(16) En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

# Partie IV - Étude de la fonction $g$

(17) Montrer que $g$ est continue sur son ensemble de définition.

(18) Justifier que $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$, puis, pour $x \in ]-1;0[\cup]0;+\infty[$, vérifier que

$$g'(x) = \frac{F(x)}{(\ln(1+x))^2}.$$

(19) Montrer que $g$ est dérivable en 0 et préciser la valeur de $g'(0)$. Montrer ensuite que $g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$.

(20) Montrer que, pour tout $x > -1$, $g'(x) > 0$. En déduire les variations de $g$ que l'on fera apparaître dans un tableau contenant aussi la limite, que l'on justifiera, de $g(x)$ en $+\infty$.

(21) La fonction $g$ est-elle dérivable en $-1$? Interpréter graphiquement.

(22) Représenter l'allure de la courbe de $g$.

# Exercice 2 ⋆ ⋆ ⋆

*Les étudiant.e.s souhaitant essayer un exercice (vraiment beaucoup) plus ambitieux peuvent choisir de remplacer l'Exercice 2 précédent par celui-ci.*

On considère des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivant chacune la même loi de Bernoulli de paramètre $p$ avec $0 < p < 1$, c'est à dire : $\forall k \in [\![1;n]\!],\ P([X_k = 1]) = p$ et $P([X_k = 0]) = 1 - p$.

On suppose que pour tout couple $(k, \ell) \in [\![1;n]\!]^2$ avec $k \neq \ell$, le coefficient de corrélation linéaire des variables $X_k$ et $X_\ell$ est le même; on note $r$ ce coefficient. On a donc :

$$\forall (k,\ell) \in [\![1;n]\!]^2, \qquad \frac{\mathrm{Cov}(X_k, X_\ell)}{\sqrt{V(X_k)V(X_\ell)}} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ r & \text{si } k \neq \ell \end{cases}$$

(1) (a) Dans les cas $(i)$ et $(ii)$ suivants, calculer la valeur de $r$ et exprimer la variance de la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ en fonction de $n$ et $p$.

(i) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

(ii) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont toutes égales.

De plus, préciser la loi de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ dans chacun des deux cas précédents.

(b) Montrer que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la variance de la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ est donnée par la formule :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = kp(1-p)(1 + (k-1)r)$$

(c) En déduire que le coefficient $r$ est au moins égal à $-\dfrac{1}{n-1}$.

(2) On suppose dans cette question que $n$ est au moins égal à 2.

(a) Montrer que $r$ est égal à $-1$ si et seulement si on a : $P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = p(2p - 1)$.

(b) Que vaut alors $P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0])$ ?

(c) En déduire que le coefficient $r$ ne peut-être égal à $-1$ que lorsque

$$p = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P([X_1 + X_2 = 1]) = 1.$$

(3) On suppose dans cette question que $n$ est supérieur ou égal à 3 et que

$$P\left(\left[\sum_{k=1}^{n} X_k = 1\right]\right) = 1.$$

(a) Exprimer les valeurs de $p$ et $r$ en fonction de $n$.

(b) Déterminer les $n$-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ pour lesquels la probabilité

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right)$$

est strictement positive et la calculer.