ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir Surveillé n°2

Lundi 12 Novembre 2018
✐ *Solution*

Exercice 1- D'après ECRICOME 2017

Dans tout l'exercice, on notera $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3. On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A : Étude de la matrice A

(1) On commence par expliciter la matrice $A - I$ avant de calculer ses puissances:

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il apparaît alors que

$$(A-I)^2 = \begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad (A-I)^3 = 0.$$

(2) En développant $(A - I)^3$ on obtient (car A et I commutent)

$$0 = A^3 - 3A^2 + 3A - I \iff A^3 - 3A^2 + 3A = I \iff A\left(A^2 - 3A + 3I\right) = I$$

donc A est inversible et

$$A^{-1} = A^2 - 3A + 3I.$$

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note, pour tout $x \in]-1;1[$, $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

(4) Pour tout $x \in]-1;1[$, $1+x>0$, or la fonction racine est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (donc en particulier $\mathcal{C}^2$) sur cet intervalle. Par composition, φ est bien de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1;1[$. Pour tout x s'y trouvant, on a

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \qquad \varphi''(x) = \frac{-1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}.$$

En particulier,

$$\varphi'(0) = \frac{1}{2}, \quad \text{et} \quad \varphi''(0) = -\frac{1}{4}.$$

(5) D'après les formules de Taylor, φ étant de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0, elle admet un développement limité d'ordre 2 donné par

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)}{2!}x^2 + x^2\varepsilon(x) \\ &= 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + x^2\varepsilon(x). \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $\alpha = -1/8$.

(6) On considère donc la fonction polynomiale P de degré 2 défini par

$$P(x) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}.$$

Un développement trivial donne

$$(P(x)^2) = 1 + x - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{64}.$$

(7) En notant alors $C = A - I$, la toute première question s'exprime comme $C^3 = 0$ (il en est de même pour toutes les puissances supérieures). Ainsi,

$$P(C)^2 = I + C - \frac{1}{8}C^3 + \frac{1}{64}C^4 = I + C = A.$$

En posant $M = P(C)$, on a clairement $M^2 = A$. Les coefficients explicites de M sont les suivants

$$\begin{aligned} M &= P(C) = I + \frac{1}{2}C - \frac{1}{8}C^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 & 6 & 0 \\ -6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \\ -6 & 6 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Partie C : Résolution complète de l'équation

Soit f l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est la matrice A.

(9) Soient u, v et w les vecteurs définis par $\left\{ \begin{array}{lcl} w &=& (1,0,1) = e_1 + e_3 \\ v &=& f(w) - w \\ u &=& f(v) - v \end{array} \right.$.

(a) On calcule

$$\begin{array}{rcl} v & = & f(w) - w \\ & = & Cw \\ & = & (1, 1, -3) \\ u & = & f(v) - v \\ & = & f(f(w) - w) + f(w) - w = f^2(w) - w = C^2 w \\ & = & (-6, -6, 0) \end{array}$$

(b) Pour montrer que la famille $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer que ces trois vecteurs forment une famille libre. Soient alors $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $xu + yv + zw = 0$. Il suffit de montrer que, nécessairement, $x = y = z = 0$. On résout donc le système, par pivot de Gauss,

$$\begin{array}{rcl} xu + yv + zw = 0 & \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} -6x + y + z & = & 0 \\ -6x + y & = & 0 \\ -3y + z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{rcl} -6x + y + z & = & 0 \\ z & = & 0 \\ -3y + z & = & 0 \end{array} \right. \\ & \iff & x = y = z = 0 \end{array}$$

et la famille $\mathcal{B}'$ est bien libre et forme donc une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Pour connaître la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$, il faut exprimer les images, par f, des vecteurs de $\mathcal{B}'$ en fonction de ces mêmes vecteurs. La définition des vecteurs donne la décomposition souhaitée

$$\begin{array}{rcl} u = f(v) - v & \iff & f(v) = u + v \\ v = f(w) - w & \iff & f(w) = v + w \\ u = (-6, -6, 0) & \implies & f(u) = A \cdot u = (-6, -6, 0) = u. \end{array}$$

Il suit alors que,

$$\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = T.$$

(d) **On admet le résultat**. Prenant un peu d'avance sur la fin du Chapitre 6, on propose quand même une justification.

Si on introduit P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base canonique, alors P est inversible et ses colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ exprimées dans la base canonique

$$P = P_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -6 & 1 & 1 \\ -6 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Id}(\mathcal{B}', \mathcal{B}),$$

(qui est bien inversible comme toute matrice de passage car les colonnes qui la composent forment une base de $\mathbb{R}^3$) on a bien

$$T = \mathrm{Mat}(f, \mathcal{B}') = \mathrm{Id}(\mathcal{B}, \mathcal{B}')\mathrm{Mat}(f, \mathcal{B})\mathrm{Id}(\mathcal{B}', \mathcal{B}) = P^{-1}AP.$$

(10) Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

(a) Si on suppose que $N^2 = T$, alors $NT = N^2 \cdot N = N^3 = N \cdot N^2 = NT$. En d'autres termes, N et T commutent. En notant
$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$
on a
$$NT = TN \iff \begin{cases} a &= a+d \\ a+b &= b+e \\ b+c &= c+f \\ d &= d+g \\ d+e &= e+h \\ e+f &= f+i \\ g &= g \\ g+h &= h \\ h+i &= i \end{cases} \iff \begin{cases} a &= e \\ d &= 0 \\ b &= f \\ g &= 0 \\ e &= i \\ g &= 0 \\ h &= 0 \end{cases},$$
ce qui donne bien
$$N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$
(b) Il est alors facile de résoudre l'équation cherchée
$$N^2 = T \iff \begin{cases} a^2 &= 1 \\ 2ab &= 1 \\ b^2 + 2ac &= 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} a &= \pm 1 \\ b &= 1/2a \\ c &= -1/8 \end{cases}$$
et on a deux solutions:
$$N_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/8 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad N_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1/2 & -1/8 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(11) On utilise le fait que $T = P^{-1}AP$ ce qui, étant équivalent à $A = PTP^{-1}$, donne
$$\begin{aligned} M^2 = A &\iff M^2 = PTP^{-1} \\ &\iff P^{-1}M^2P = T \\ &\iff \left(P^{-1}MP\right)^2 = T \\ &\iff P^{-1}MP = N_1 \quad \text{ou} \quad P^{-1}MP = N_2 \\ &\iff M = PN_1P^{-1} \quad \text{ou} \quad M = PN_2P^{-1} \end{aligned}$$
et on a bien exhibé les deux solutions souhaitées.

(12) Il est facile de voir que l'ensemble des solutions n'est pas un sous-espace vectoriel (de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$). Il existe une multitude de contre-arguments. Le plus simple est de mentionner que la matrice nulle n'en est pas un élément.

Exercice 2

On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec probabilité p. On note $q = 1 - p$.

On dit que la première série est de longueur $n \geq 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n+1)$-ième l'autre côté. De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine au lancer précédant un changement de côté.

Par exemple si les lancers donnent les résultats $FFPPPPPPFFFPP\dots$ alors la première série est de longueur 2 et la deuxième est de longueur 6.

Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux longueurs de la première et deuxième série.

(1) (Simulation Informatique)

(a) Une loi de Bernoulli de paramètre p se simule donc par l'appel de `grand(1,1,'bin', 1, p)`. On complète sans mal le programme.

```
function X=DS3(p)
    X=1;
    told=grand(1,1,'bin', 1, p)
    tnew=grand(1,1,'bin', 1, p)
    while told == tnew //tant que les lancers donnent la même chose
        X=X+1;
        told=tnew;
        tnew=grand(1,1, 'bin', 1, p) //on lance à nouveau
    end
endfunction
```

(b) On a plusieurs façons d'écrire ce vecteur ligne. On propose la suivante

```
function U=SampleX1(N,p)
    U=[]
    for k=1:N
        U=[U, DS3(p)]
    end
endfunction
```

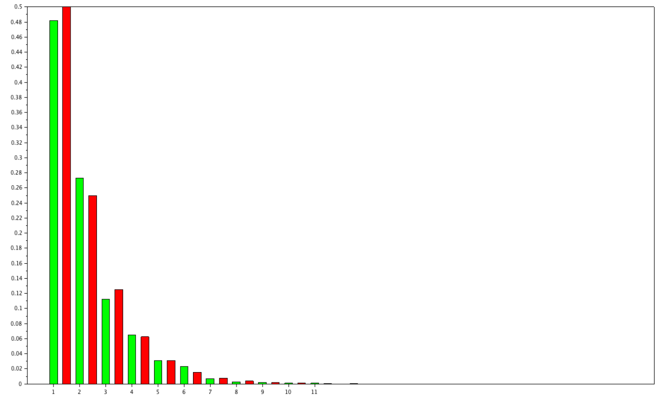
(c) Les deux premières lignes permettent de classer (par ordre croissant) les valeurs obtenues en simulant 1000 fois la loi X_1 avec $p = 1/2$. La toute dernière ligne permet de représenter le diagramme à bâtons (en vert) des fréquences pour cet échantillon.

Les trois autres lignes permettent de générer un vecteur ligne dont les composantes sont les valeurs théoriques de la loi géométrique de paramètre 1/2, valeurs qu'on représente également par un diagramme à bâtons, affiché en parallèle et en rouge.

Les hauteurs semblent les mêmes. On peut **conjecturer** que, si $p = 1/2$, $X_1 \hookrightarrow G(1/2)$.

```
U=SampleX1(1000,0.5)
T=tabul(U, 'i');

x=1:length(T);
G=(0.5)^x;
bar(x+.5, G, 0.3, 'red') //On décale de 0.5 pour afficher les bâtons en
parallèle
bar(T(:,1), T(:, 2)/1000, 0.3, 'green')
```



(2) Dans toute la suite, on introduit les évènements P_i (resp. F_i) "le $i-$ème lancer donne *Pile*" (resp. *Face*).

La première série est de longueur au moins 1, mais peut être arbitrairement longue. Ainsi $X_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$. De plus, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} P(X_1 = i) &= P\left(P_1 \cap P_2 \cap ... \cap P_i \cap F_{i+1} \cup F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_i \cap P_{i+1}\right) \\ &= P\left(P_1 \cap P_2 \cap ... \cap P_i \cap F_{i+1}\right) + P\left(F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_i \cap P_{i+1}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{i} P(P_k) \cdot P(F_{i+1}) + \prod_{k=1}^{i} P(F_k) \cdot P(P_{i+1}) \qquad \text{(par indépendance des lancers)} \\ &= p^i q + q^i p \end{aligned}$$

(3) On sait que X_1 admet une espérance si et seulement si la série de terme général $iP(X_1 = i)$ converge (absolument). Ici tout est positif, on s'intéresse donc à la convergence sans valeur absolue. Or

$$iP(X_1 = i) = i\left(q \cdot p^i + p \cdot q^i\right) = qp\left(ip^{i-1} + iq^{i-1}\right)$$

et on reconnait une combinaison de termes généraux de séries géométriques dérivées de raisons respectives p et q toutes deux convergentes (car $0 < p, q < 1$). Ainsi, X_1 admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(X_1) &= \sum_{i=1}^{+\infty} qp\left(ip^{i-1} + iq^{i-1}\right) \\ &= qp\left(\sum_{i=1}^{+\infty} ip^{i-1} + \sum_{i=1}^{+\infty} iq^{i-1}\right) \\ &= qp\left(\frac{1}{(1-p)^2} + \frac{1}{(1-q)^2}\right) = qp\left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{p^2}\right) \\ &= \frac{p}{q} + \frac{q}{p}. \end{aligned}$$

(4) La longueur de la deuxième série est également à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Soit donc $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

$$\begin{aligned} P(X_1 = i \cap X_2 = j) = P\big(&P_1 \cap P_2 \cap ... \cap P_i \cap F_{i+1} \cap ... \cap F_{i+j} \cap P_{i+j+1} \\ &\cup F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_i \cap P_{i+1} \cap ... \cap P_{i+j} \cap F_{i+j+1}\big) \end{aligned}$$

Comme précédemment, les deux alternatives sont incompatibles (l'union est disjointe), les lancers sont indépendants et on obtient

$$P(X_1 = i \cap X_2 = j) = p^i q^j p + q^i p^j q = q^j p^{i+1} + p^j q^{i+1}.$$

(5) On applique la formule des probabilités totales, au s.c.e $\{(X_1 = i) : \; i \in \mathbb{N}^*\}$ pour obtenir la loi (marginale) de X_2. Soit $j \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} P(X_2 = j) &= \sum_{i=1}^{+\infty} P(X_2 = j \cap X_1 = i) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(q^j p^{i+1} + p^j q^{i+1}\right) \\ &= q^j p^2 \sum_{i=1}^{+\infty} p^{i-1} + p^j q^2 \sum_{i=1}^{+\infty} q^{i-1} \\ &= q^j p^2 \times \frac{1}{1-p} + p^j q^2 \times \frac{1}{1-q} \\ &= p^2 q^{j-1} + q^2 p^{j-1}. \end{aligned}$$

(6) C'est comme précédemment; X_2 admet une espérance si et seulement si la série de terme général $jP(X_2 = j)$ converge (encore une fois, tout est positif et nul besoin de convergence absolue ici). Or,

$$jP(X_2 = j) = j\left(p^2 q^{j-1} + q^2 p^{j-1}\right) = p^2 j q^{j-1} + q^2 j p^{j-1},$$

et on reconnait une combinaison de séries géométriques dérivées de raisons respectives q et p donc convergentes. Ainsi, X_2 admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(X_2) &= p^2 \sum_{j=1}^{+\infty} j q^{j-1} + q^2 \sum_{j=1}^{+\infty} j p^{j-1} \\ &= p^2 \times \frac{1}{(1-q)^2} + q^2 \times \frac{1}{(1-p)^2} \\ &= 1 + 1 \\ &= 2. \end{aligned}$$

(7) On **admet** $E(X_1 X_2)$ existe. *Si on veut le montrer, il s'agit de justifier de la convergence d'une somme double infinie. Plus précisément, il faut donc justifier de la convergence (absolue) de la "série"*

$$\sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} ij P(X_1 = i \cap X_2 = j) = \sum_{i \geq 1} \sum_{j \geq 1} ij\left(q^j p^{i+1} + p^j q^{i+1}\right)$$

Si on voulait le faire, les détails sont - sans être difficile ici - un peu techniques pour le programme en ECE. En revanche, on sait calcule cette somme double si on admet qu'elle converge.

$$\begin{aligned} E(X_1 X_2) &= \sum_{i=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} ij\left(q^j p^{i+1} + p^j q^{i+1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} i\left(p^{i+1} \sum_{j=1}^{+\infty} j q^j + q^{i+1} \sum_{j=1}^{+\infty} j p^j\right) = \sum_{i=1}^{+\infty} i\left(p^{i+1} q \sum_{j=1}^{+\infty} j q^{j-1} + q^{i+1} p \sum_{j=1}^{+\infty} j p^{j-1}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{i p^{i+1} q}{(1-q)^2} + \frac{i q^{i+1} p}{(1-p)^2}\right) = q \sum_{i=1}^{+\infty} i p^{i-1} + p \sum_{i=1}^{+\infty} i q^{i-1} \\ &= q \times \frac{1}{(1-p)^2} + p \times \frac{1}{(1-q)^2} \\ &= \frac{1}{q} + \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

(8) On vérifie, pour $p = 1/2 = q$ que, pour tout $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$,
$$P(X_1 = i \cap X_2 = j) = P(X_1 = i)P(X_2 = j).$$
En effet, d'une part
$$P(X_1 = i)P(X_2 = j) = \left(p^i q + q^i p\right)\left(p^2 q^{j-1} + q^2 p^{j-1}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^i \times \left(\frac{1}{2}\right)^j = \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j}$$
et d'autre part
$$P(X_1 = i \cap X_2 = j) = q^j p^{i+1} + p^j q^{i+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j}.$$
et les v.a X_1 et X_2 sont bien, dans ce cas, indépendantes.

(9) On suppose que $p \neq 1/2$.

(a) On suit l'indication du texte.
$$P(X_1 = 1 \cap X_2 = 1) = qp^2 + pq^2 = p(pq + q^2) = pq(p+q) = pq$$
alors que
$$P(X_1 = 1)P(X_2 = 1) = (pq + qp)(p^2 + q^2) = 2pq(p^2 + q^2)$$
Ces deux quantités ne coïncident que si
$$2(p^2 + q^2) = 1 \iff 2(p^2 + (1-p)^2) - 1 = 0 \iff 4p^2 - 4p + 1 = 0 \iff (2p-1)^2 = 0 \iff p = \frac{1}{2},$$
ce qui n'est pas le cas. Ainsi, X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

(b) Par la formule de König-Huyguens,
$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(X_1, X_2) &= E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 2\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) \\
&= \frac{q + p - 2p^2 - 2q^2}{pq} = \frac{1 - 2p^2 - 2 + 4p - 2p^2}{pq} \\
&= \frac{-1 + 4p - 4p^2}{pq} = \frac{-1 + 4p(1-p)}{pq} \\
&= 4 - \frac{1}{pq}.
\end{aligned}$$
En particulier, comme $p \neq 1/2$, $1/pq \neq 4$ et $\operatorname{cov}(X_1, X_2) \neq 0$ prouvant également que les variables X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Exercice 3

Dans tout l'exercice, on considère

- La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par
$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2};$$
- La fonction F définie sur $]-1; +\infty[$ par
$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t;$$

- La fonction g définie sur $[-1;+\infty[$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(x+1)}, & \text{si } x \notin \{0;-1\} \\ 1, & \text{si } x = 0, \\ 0, & \text{si } x = -1 \end{cases}$$

- La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie I - Étude de la fonction f

(1) En $\pm\infty$, on a

$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} \frac{1}{x} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Comme

$$\lim_{x\to-1^\pm} (x+1)^2 = 0^+,$$

il suit que

$$\lim_{x\to-1^\pm} f(x) = -\infty.$$

(2) En dehors de -1, f est dérivable comme quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas. On a, pour $x \neq -1$,

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 - x\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{(x+1)-2x}{(x+1)^3} = \frac{1-x}{(x+1)^3}$$

dont le signe se détermine facilement et permet de dresser le tableau de variations ci-dessous

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
f	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

Partie II - Étude de la fonction F

(3) La fonction f est continue sur $]-1;+\infty[$. Par le théorème fondamental de l'analyse, $F(x)$ est alors bien définie (intégrale d'une fonction continue sur un segment) et est **la** primitive de f qui s'annule en 0. Ainsi, F et dérivable sur $]-1;+\infty[$, $F'(x) = f(x)$ et f étant continue, F' l'est ce qui donne bien F de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

(4) Le changement de variable $u = t+1$ est affine donc licite; il donne $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$ et on obtient

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{t}{(t+1)^2}\mathrm{d}t = \int_1^{x+1} \frac{u-1}{u^2}\mathrm{d}u \\ &= \int_1^{x+1} \frac{\mathrm{d}u}{u} + \int_1^x \left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= [\ln(u)]_1^{x+1} + \left[\frac{1}{u}\right]_1^{x+1} \\ &= \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} - 1 \\ &= \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}, \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

(5) Comme $x \sim x+1$ (pour $x \to +\infty$), et que $\ln(x+1) \to +\infty$, il est clair que

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty.$$

Par ailleurs,

$$F(x) = -\frac{1}{x+1}\left(1 - (x+1)\ln(x+1)\right) \underset{x \to -1^+}{\longrightarrow} -\infty$$

car $(x+1)\ln(x+1) \to 0$ par croissance comparée.

(6) (a) Comme f est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$, F est finalement de classe $\mathcal{C}^2$ sur son ensemble de définition et sa concavité est caractérisée par le signe de sa dérivée seconde, égale à $f'(x)$, dont on connait le signe par la première partie de l'exercice. Plus précisément,
- $F''(x)$ s'annule en changeant de signe en $x=1$ et admet un (unique) point d'inflexion d'abscisse $x=1$ et d'ordonnée $y = F(1) = \ln(2) - 1/2 \simeq 0,19$;
- $F''(x) > 0$ sur $]-1;1[$ donc F y est convexe;
- F est alors concave sur $]1;+\infty[$

(b) Sur $]-1;1[$, F est convexe donc la courbe de F est au dessus de ses tangentes (sur ce même intervalle). LA tangente en 0 a pour équation $y = f(0)x + F(0) = 0$. Ainsi, $F(x) \geq 0$ sur $]-1;1[$ mais en fait, le seul point d'égalité est le point de tangence ($x=0$) donc pour $x \in]-1;1[$, $F(x) > 0$.

Sur $[1;+\infty[$, $F'(x) = f(x) \geq 0$ donc F est croissante et donc $F(x) \geq F(1) = \ln(2) - 1/2 > 0$. Au final, pour tout $x \in]-1;+\infty[$ non nul, on a bien $F(X) > 0$.

(7) On rappelle les DL usuels en 0 à l'ordre 2

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2).$$

Ces DL permettent d'obtenir celui de notre fonction F en 0. En effet,

$$\begin{aligned} F(x) &= \ln(1+x) - \frac{1}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x\left(1 - x + x^2 + o(x^2)\right) \\ &= x - \frac{x^2}{2} - x + x^2 + o(x^2) \\ &= \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

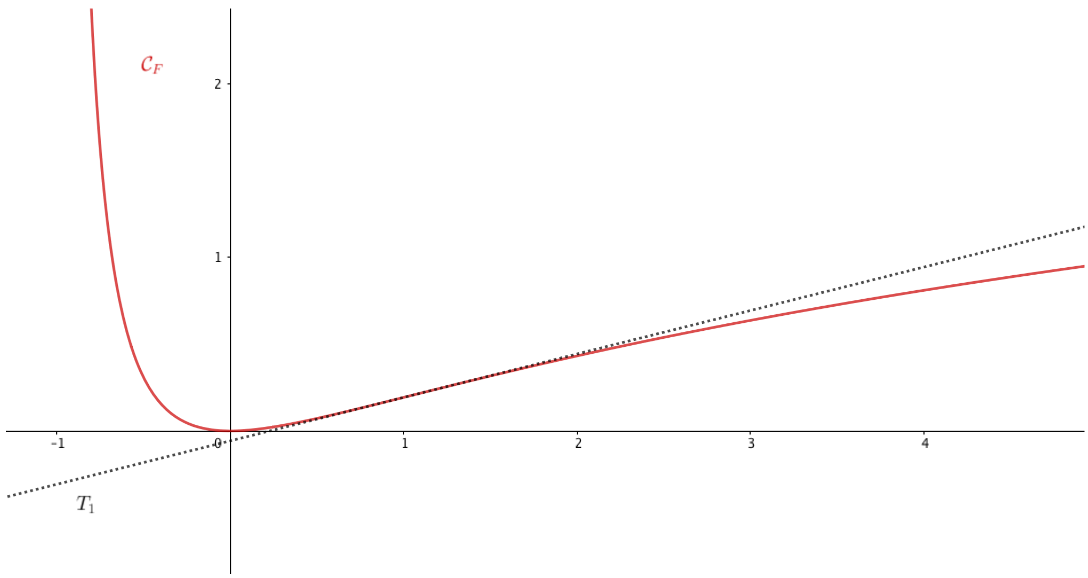
Remarque. On aurait aussi pu (même si la formulation de la question suggère de procéder comme ci-dessus) utiliser la formule de Taylor-Young car F est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0.

$$\begin{aligned} F(x) &= F(0) + F'(0)x + \frac{F''(0)}{2!}x^2 + o(x^2) = \frac{f'(0)}{2}x^2 + o(x^2) \\ &= \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

(8) La tangente en 0 a pour équation $y = 0$ (c'est donc l'axe des abscisses). On sait déjà que la courbe de F est au dessus.

(9) On notera aussi T_1 la tangente au point d'inflexion, plus intéressante finalement que la tangente en 0, permettant notamment de visualiser le changement de convexité. On peut commencer par faire apparaître le tableau de variations de F même s'il n'est pas explicitement demandé, il permet un tracé plus facile.

x	-1		0		$+\infty$
$F'(x)$	||	$-$	0	$+$	
F	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Partie III - Étude de la suite (u_n)

(10) Par définition, $u_1 = f(u_0) = f(1) = 1/(1+1)^2 = 1/4$. Puis,

$$u_2 = f(u_1) = f(1/4) = \frac{1/4}{(1+1/4)^2} = \frac{4}{25}.$$

(11) On procède donc par récurrence, comme demandé.

- initialisation. Pour $n = 1$, on a $u_1 = 1/4 \leq 1 = 1/1$ et $u_1 > 0$. Donc la proposition est vraie pour $n = 1$.

- hérédité. Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n \leq 1/n$. Comme f est strictement croissante entre $]-1;1[$ dont 0, u_n et $1/n$ sont des éléments donc

$$0 = f(0) < f(u_n) = u_{n+1} < f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1/n}{(1+1/n)^2} = \frac{n}{(n+1)^2} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$$

car $n/(n+1) \leq 1$.

Ainsi la récurrence est bien démontrée.

(12) Par le théorème des gendarmes, il suit de l'encadrement précédent que u_n converge vers 0.

(13) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

(a) Commençons par voir que

$$v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} = \frac{(u_n+1)^2}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n^2 + 2u_n}{u_n} = u_n + 2$$

ce qui donne, d'après l'encadrement de u_n ci-dessus, l'encadrement voulu:

$$2 \leq v_n \leq 2 + \frac{1}{n}.$$

(b) Comme on a l'habitude et qu'on est quand même, ne nous mentons pas, bien préparés, on reconnait une somme télescopique. On somme donc l'encadrement précédent.

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_1}$$

Mais,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \left(2 + \frac{1}{k} \right) = 2(n-1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

et

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} \right) \geq \sum_{k=1}^{n-1} 2 = 2(n-1).$$

Ainsi,

$$2n - 2 \leq \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_1} \leq 2n - 2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

mais comme $1/u_1 = 4$, on obtient bien

$$2(n+1) \leq \frac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

(14) (a) On a déjà répondu, en classe, à la maison ou ailleurs plusieurs fois à cette question. La fonction $t \mapsto 1/t$ est décroissante sur l'intervalle $[k-1;k]$, et par positivité de l'intégrale on a

$$\forall t \in [k-1;k], \quad \frac{1}{t} \geq \frac{1}{k} \qquad \Longrightarrow \qquad \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} \geq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{k} = \frac{1}{k} \int_{k-1}^{k} \mathrm{d}t = \frac{1}{k}.$$

(b) On somme et on utilise la relation de Chasles

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{+} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1 + \int_{1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} = 1 + \ln(n).$$

(15) En combinant (13)(b) et (14)(b), on a

$$2(n+1) \leq \frac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + 1 + \ln(n)$$

Ainsi, en multipliant par $1/(2n)$, on a

$$1 + \frac{1}{n} \leq \frac{1/(2n)}{u_n} \leq 1 + \frac{1}{n} + \frac{\ln(n)}{2n}$$

et le théorème des gendarmes donne alors la limite du quotient égale à 1, ou encore

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}.$$

(16) La série de terme général $1/(2n)$ est divergente (c'est le multiple du terme général de la série harmonique, exemple de série de Riemann divergente). Par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, on peut également conclure à la divergence de la série $\sum u_n$.

Partie IV - Étude de la fonction g

(17) En dehors de 0 et de -1, g est continue comme quotient de fonctions usuelles continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Il faut donc vérifier ce qui se passe en -1 et en 0.

- En -1: le numérateur tend vers -1, alors que le dénominateur tend vers $-\infty$. Par algèbre des limites, on a
$$\lim_{x\to -1^+} g(x) = 0 = g(0)$$
donc g est continue en -1;

- En 0: on retrouve une limite usuelle (obtenue avec un DL à l'ordre 1), on a
$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = 1 = g(0)$$
donc g est continue en 0.

(18) Sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$, g est quotient de fonctions usuelles de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas, ainsi g est bien $\mathcal{C}^1$ sur chacun des ces intervalles. Pour $x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$, on a
$$g'(x) = \frac{\ln(x+1) - \frac{x}{x+1}}{(\ln(x+1))^2} = \frac{F(x)}{(\ln(x+1))^2}.$$

(19) Pour montrer la dérivabilité en 0, il faut déterminer la limite du taux d'accroissement, à l'aide de DL qui font plaisir
$$\begin{aligned}\frac{g(x)-g(0)}{x} &= \frac{\frac{x}{\ln(x+1)} - 1}{x} \\ &= \frac{x - \ln(x+1)}{x\ln(x+1)} \\ &= \frac{x - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x(x+o(x))} \\ &= \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \\ &= \frac{1/2 + o(1)}{1 + o(1)} \\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2},\end{aligned}$$
ainsi g est dérivable en 0 et $g'(0) = 1/2$. Pour montrer ensuite le caractère $\mathcal{C}^1$ en 0, il faut montrer que la dérivée g' est continue en 0, avec l'aide de DL et notamment celui trouvé pour $F(x)$. Fingers in the nose.
$$\begin{aligned}g'(x) &= \frac{F(x)}{\ln(1+x)^2} = \frac{x^2/2 + o(x^2)}{(x+o(x))^2)} = \frac{x^2/2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} \\ &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2} = g'(0)\end{aligned}$$
donc g' est bien continue en 0 et g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$.

(20) Comme $F(x) > 0$ sur $]-1;+\infty[$ en dehors de 0, que $g'(0) > 0$ et que le dénominateur de $g'(x)$ est strictement positif, on en déduit qu'en effet $g'(x) > 0$ pour tout $x > -1$, ainsi g est strictement croissante sur son ensemble de définition. Par croissance comparée, on a aussi
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

On en déduit le tableau de variations suivant

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$\|$	$+$
g	0	$\nearrow +\infty$

(21) Le taux d'accroissement de g en -1 a une limite infinie. Ainsi, g n'est pas dérivable en -1 et sa courbe y admet une tangente verticale.

(22) Les éléments de l'étude précédente permettent de faire le joli dessis