ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Surveillé n°4 - Sujet A (type EML)

Durée: 4 heures

Exercice 1

Partie I

(1) Soit U une variable aléatoire à densité suivant une loi normale $U \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}\right)$.

(a) Rappeler une densité de U.

(b) En utilisant la définition de la variance de U, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} \mathrm{d}x$ et que

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x^2}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

(2) Montrer que la fonction F définit une fonction de répartition de variable aléatoire dont on déterminera une densité f.

(3) Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.

(a) Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et que $E\left(X\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

(b) Déterminer, pour tout réel y, la probabilité $\mathrm{P}\left(X^2 \leq y\right)$.
On distinguera les cas $y \leq 0$ et $y > 0$.

(c) Montrer que la variable aléatoire X^2 suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre. En déduire que X admet une variance $V(X)$ que l'on précisera.

Partie II

(4) Soit Z une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. Rappeler la valeur de l'espérance $E(Z)$ et celle de la variance $V(Z)$ de la variable aléatoire Z.

(5) Soient un entier n supérieur ou égal à 2, et n variables aléatoires indépendantes $Z_1, Z_2, ..., Z_n$, suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.

On considère la variable aléatoire

$$M_n = \frac{Z_1 + Z_2 + ... + Z_n}{n}.$$

(a) Déterminer l'espérance m et l'écart-type σ_n de M_n

(b) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{P}\left(0 \leq M_n - m \leq \sigma_n\right)$ existe et exprimer sa valeur à l'aide de $\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x$.

Exercice 2

On considère les trois matrices de $\mathcal{M}_2$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) (a) Quelles sont les valeurs propres de A ?
(b) Déterminer une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$.

(2) On note E l'ensemble des matrices carrées M d'ordre 2 telles que : $AM = MD$.
(a) Vérifier que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_2$.
(b) Montrer que

$$M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in E \quad \Longleftrightarrow \quad (z = 0 \quad \text{et} \quad y = t)\,.$$

(c) Établir que (U, A) est une base de E.
(d) Calculer le produit UA. Est-ce que UA est élément de E?

(3) On note $f : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_2$ l'application définie, pour tout $M \in \mathcal{M}_2$, par

$$f\,(M) = AM - MD.$$

(a) Vérifier que f est linéaire.
(b) Déterminer le noyau de f et donner sa dimension.
(c) Quelle est la dimension de l'image de f?
(d) Déterminer les matrice M de $\mathcal{M}_2\,(\mathbb{R})$ telles que $f\,(M) = M$.
En déduire que 1 est valeur propre de f. Montrer que -1 est aussi valeur propre de f.
(e) Est-ce que f est diagonalisable ?
(f) Montrer que $f \circ f \circ f = f$.

Exercice 3

On considère l'application

$$f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f\,(x) = (x + \ln x)\, e^{x-1}.$$

Partie I : Étude et représentation graphique de f

(1) Justifier que f est dérivable sur $]0; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, calculer $f'\,(x)$.
(2) Établir que

$$\forall x \in]0, +\infty[\,, \qquad \ln x + \frac{1}{x} > 0.$$

(3) En déduire que

$$\forall x \in]0; +\infty[\,, \qquad x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} > 0.$$

(4) En déduire le sens de variation de f.
(5) Dresser le tableau de variation de f, comprenant la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.
(6) Quelle est la nature de la branche infinie de la courbe représentative de f?
(7) Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On précisera la tangente au point d'abscisse 1.

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à f.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 2 \qquad \text{et, pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

(8) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.

(9) Établir, par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq e^n$.

(10) Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

(11) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $v_n = 1/u_n$. Montrer que la série de terme général v_n converge. On note S sa limite.

(12) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left| S - \sum_{k=0}^{n} v_k \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}.$$

(13) (a) Écrire une fonction `SciLab`, d'entête `function V=Suite_V (n)`, prenant en paramètre un entier n et renvoyant la valeur de v_n.

(b) À l'aide de la Question 12, compléter la fonction `SciLab` ci-dessous pour qu'elle renvoie une valeur approchée de S à 10^{-3} près.

```
function App = Approx_S()
    n = 0
    v = Suite_V(0)
    App = v
    e = 1/(exp(1)-1)
    while e ..........
        n = n+1
        v = Suite_V(n)
        App = ..........
        e = ..........
endfunction
```

Partie III : Étude d'extremums locaux pour une fonction de deux variables associée à f

On considère l'application

$$F :]0; +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto F(x) = \int_1^x f(t)\,dt.$$

(14) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x \in]0; +\infty[$, exprimer $F'(x)$ à l'aide de $f(x)$.

On considère l'application de classe $\mathcal{C}^2$

$$G :]0; +\infty[^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto G(x, y) = F(x) + F(y) - 2e^{\frac{x+y}{2}}.$$

(15) Pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$, exprimer les dérivées partielles premières $\partial_1(G)(x, y)$ et $\partial_2(G)(x, y)$ à l'aide de $f(x)$, $f(y)$ et $e^{(x+y)/2}$.

(16) (a) Montrer que f est bijective.

(b) Établir que, pour tout $(x, y) \in]0; +\infty[^2$, (x, y) est un point critique de G si et seulement si

$$x = y \quad \text{et} \quad x + \ln x = e.$$

(17) Montrer que l'équation $x + \ln x = e$ d'inconnue $x \in]0; +\infty[$ admet une unique solution, que l'on notera α, et montrer que : $1 < \alpha < e$.

(18) En déduire que G admet comme unique point critique le point (α, α) et montrer que la matrice Hessienne de G au point (α, α) s'écrit :

$$H = \nabla^2(G)(\alpha, \alpha) = \begin{pmatrix} f'(\alpha) - \dfrac{e^\alpha}{2} & -\dfrac{e^\alpha}{2} \\ -\dfrac{e^\alpha}{2} & f'(\alpha) - \dfrac{e^\alpha}{2} \end{pmatrix} = f'(\alpha) I_2 - \frac{e^\alpha}{2} M$$

où

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(19) (a) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ et X un vecteur propre de M associé à λ. Montrer que

$$HX = \left(f'(\alpha) - \frac{e^\alpha}{2} \lambda \right) X$$

et en déduire que

$$\mathrm{Sp}(H) = \{ f'(\alpha), f'(\alpha) - e^\alpha \}.$$

(b) Montrer que $f'(\alpha) > e^\alpha$.

(c) En déduire que G admet un extremum local et préciser sa nature.