ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Surveillé n°4 - Sujet A (type EML)

Solution

Exercice 1 - D'après EML 2006

Partie I

(1) **Soit U une variable aléatoire à densité suivant une loi normale d'espérance nulle et de variance $\frac{1}{2}$**

(a) **Rappeler la formule donnant la densité d'une loi normale de paramètres m et σ^2. En déduire une densité de U.**
D'après le cours, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, une densité de X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Ici, $m = 0$ et $\sigma^2 = \frac{1}{2}$, ce qui donne :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}}$$

(b) **En utilisant la définition de la variance de U, montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx$ est convergente et que $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$**
Comme $E(U) = 0$, on a :

$$V(U) = E(U^2) - E(U)^2 = E(U^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)\,\underset{\cdot}{x}$$

Or la fonction : $x \to x^2 g(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}x^2 e^{-x^2}$ est une fonction paire.
Comme l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)$ est convergente (car $V(U)$ existe), l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 g(x)\,\underset{\cdot}{x}$ converge aussi et on a par parité :

$$V(U) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 g(x)\,\underset{\cdot}{x} = 2\int_0^{+\infty} x^2 g(x)\,\underset{\cdot}{x}$$

Ainsi, on a :

$$\int_0^{+\infty} x^2 g(x)\,\underset{\cdot}{x} = \frac{1}{2}V(U) = \frac{1}{4}$$

soit

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,\underset{\cdot}{x} = \frac{1}{4}$$

donc

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} \underset{\cdot}{x} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

Finalement, $\boxed{\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} \underset{\cdot}{x} \text{ est convergente et } \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} \underset{\cdot}{x} = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.}$

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \forall x \leqslant 0, & F(x) = 0 \\ \forall x > 0, & F(x) = 1 - e^{-x^2} \end{cases}$

(2) **Montrer que la fonction F définit une fonction de répartition de variable aléatoire dont on déterminera une densité f.**

- F est nulle donc continue sur $]-\infty; 0]$.
  F est continue sur $]0; +\infty[$ comme composée de fonctions continues sur $]0; +\infty[$.
  De plus , $\lim_{x\to 0^+} F(x) = 0 = F(0) = \lim_{x\to 0^-} F(x)$ donc F est continue en 0.
  Ainsi F est continue sur $\mathbb{R}$.
- F est nulle donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty; 0]$.
  F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.
  Donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
- On a : $F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 2xe^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$, ce qui prouve que F est croissante sur $\mathbb{R}$ (puisque F est continue en 0).
- Enfin, on a : $\lim_{x\to -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x\to +\infty} F(x) = 1$.

Ainsi, $\boxed{F \text{ est bien la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.}}$

D'après les calculs précédents, une densité est donnée par : $\boxed{f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2xe^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}}$.

(3) **Soit X une variable aléatoire admettant f pour densité.**

(a) **Montrer que X admet une espérance $E(X)$ et que $E(X) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.**

On a :

$$xf(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 2x^2 e^{-x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- Comme $xf(x)$ est nulle sur $]-\infty; 0]$, $\int_{-\infty}^0 xf(x) \underset{\cdot}{x}$ est absolument convergente et vaut 0.
- D'après la question 1b, l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} \underset{\cdot}{x}$ est convergente donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} xf(x) \underset{\cdot}{x}$ est absolument convergente (la fonction est positive) et on a :

$$\int_0^{+\infty} xf(x) \underset{\cdot}{x} = 2\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} \underset{\cdot}{x} = 2 \times \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Ainsi, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) \underset{\cdot}{x}$ est absolument convergente, donc X admet une espérance et on a :

$\boxed{E(X) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$.

(b) **Déterminer, pour tout réel y, la probabilité $P(X^2 \leqslant y)$. *On distinguera les cas* $y \leqslant 0$ *et* $y > 0$.**

- Si $y < 0$, l'événement $[X^2 \leqslant y]$ est impossible donc : $\boxed{P(X^2 \leqslant y) = 0}$
- Si $y = 0$, $P(X^2 \leqslant 0) = P(X^2 = 0) = 0$ car X est une variable à densité.
- Si $y > 0$, on a :

$$P(X^2 \leqslant y) = P(-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}) = F(\sqrt{y}) - F(-\sqrt{y})$$

donc, comme $F(t) = 1 - e^{-t^2}$ pour tout $t > 0$, on a : $\boxed{P(X^2 \leqslant y) = 1 - e^{-y}}$.

(c) **Montrer que la variable aléatoire X^2 suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.**
Notons G la fonction de répartition de la variable aléatoire X^2.
Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a : $G(y) = P(X^2 \leqslant y)$ donc d'après la question précédente, on a :

$$G(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leqslant 0 \\ 1 - e^{-y} & \text{si } y > 0 \end{cases}$$

On reconnaît ici la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1. Donc $\boxed{X^2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1).}$

En déduire que X admet une variance $V(X)$ et calculer $V(X)$
Comme $X^2 \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, la variable aléatoire X^2 admet une espérance donc la variable aléatoire X admet un moment d'ordre 2 donc $\boxed{X \text{ admet une variance.}}$
De plus, comme $E(X^2) = 1$, on a :

$$\boxed{V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - \frac{\pi}{4}}$$

Partie II

(4) **Soit Z une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. Rappeler la valeur de l'espérance $E(Z)$ et celle de la variance $V(Z)$ de la variable aléatoire Z.**
D'après le cours, on a :

$$\boxed{E(Z) = \frac{1}{p} \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{1-p}{p^2}}$$

(5) **Soient un entier n supérieur ou égal à 2, et n variables aléatoires indépendantes Z_1, Z_2, ..., Z_n, suivant toutes le loi géométrique de paramètre p. On considère la variable aléatoire $M_n = \frac{1}{n}(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)$.**

(a) **Déterminer l'espérance m et l'écart-type σ_n de M_n**
Par linéarité de l'espérance on a :

$$E(M_n) = \frac{1}{n}(E(Z_1) + \cdots + E(Z_n)) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{p} + \cdots + \frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p} \quad \text{donc} \quad \boxed{m = \frac{1}{p}}$$

Comme les variables aléatoires Z_i sont indépendantes, on a

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2}(V(Z_1)+\cdots+V(Z_n)) = \frac{1}{n^2}\left(\frac{1-p}{p^2} + \cdots + \frac{1-p}{p^2}\right) = \frac{1}{n^2}n\frac{1-p}{p^2} = \frac{1-p}{np^2} \quad \text{donc} \quad \boxed{\sigma_n = \sqrt{\frac{1-p}{np^2}}}$$

(b) Par le théorème central limite,

$$M_n^* = \frac{M_n - E(M_n)}{\sqrt{V(_n)}} = \frac{M_n - m}{\sigma_n}$$

converge en loi vers Z, où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$. Notant Φ la fonction de répartition de celle-ci, on a

$$\begin{aligned} P(0 \le M_n - m \le \sigma_n) &= P(0 \le M_n^* \le 1) \\ &\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P(0 \le Z \le 1) \\ &= \Phi(1) - \Phi(0) \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Exercice 2 - D'après EML 2006

On considère les trois matrices de $\mathcal{M}_2$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) (a) Comme A est triangulaire, ses valeurs propres sont sur sa diagonale :0 et 1.

(b) Comme on a deux valeurs propres distinctes, il suffit d'avoir deux vecteurs propres pour avoir une base :
$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ donc $(1,0)$ est vecteur propre associé à 0.
$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $(1,1)$ est vecteur propre associé à $(1,1)$
Donc $((1,0),(1,1))$ est une base de vecteurs propres
et avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ on a $A = P\,D\,P^{-1}$.

On note E l'ensemble des matrices carrées M d'ordre 2 telles que : $A\,M = M\,D$

(2) (a) E est inclus dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
$0 \in E$ car $A0 = 0 = 0D$
Soient M et N de E et α et β réels alors
$A(\alpha M + \beta N) = \alpha AN + \beta AM = \alpha ND + \beta MD = (\alpha M + \beta N)D$
Donc $(\alpha M + \beta N) \in E$
Conclusion : $\boxed{E \text{ est un sous espace vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

(b) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
On a $AM = \begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix}$ et $MD = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix}$
Donc M appartient à E si et seulement si $\begin{cases} z = 0 & y = t \\ z = 0 & t = t \end{cases}$
Conclusion : $\boxed{\text{Donc } M \text{ appartient à } E \text{ si et seulement si } z = 0 \text{ et } y = t}$

(c) on paramètre alors les solutions :
$E = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} / z = 0 \text{ et } y = t\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x & t \\ 0 & t \end{pmatrix} / x, t \in \mathbb{R}\right\} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$
Donc $E = \text{Vect}(U, A)$
qui est donc génératrice de E et qui est libre donc
Conclusion : $\boxed{(U, A) \text{ est une base de } E.}$

(d) On a $U\,A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui ne vérifie pas la seconde équation "$y = t$" car $0 \neq 1$
Conclusion : $\boxed{U\,A \text{ n'est pas élément de } E}$

(3) On note $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application définie , pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, par : $f(M) = A\,M - M\,D$.

(a) Pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on a $f(M) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
Soient M et N de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et α et β réels alors

$$\begin{aligned} f(\alpha M + \beta N) &= A(\alpha M + \beta N) - (\alpha M + \beta N)D \\ &= \alpha AN + \beta AM - \alpha ND + \beta MD \\ &= \alpha(A\,M - M\,D) + \beta(A\,N - N\,D) \\ &= \alpha f(M) + \beta f(N) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

(b) $M \in \ker(f) \Longleftrightarrow AM - MD = 0 \Longleftrightarrow M \in E$
Conclusion : $\boxed{\ker f = E \text{ et } \dim(\ker f) = 2}$ puisque (U, A) en est une base.

(c) D'après le théorème du rang on a alors $\dim(Im(f)) = 4 - 2 = 2$
Conclusion : $\boxed{\dim(Im(f)) = 2}$

(d) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ alors $f(M) = \begin{pmatrix} z & t \\ z & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & t-y \\ z & 0 \end{pmatrix}$

et $f(M) = M \Longleftrightarrow \begin{cases} z = x & y = t - y \\ z = z & t = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = x & y = 0 \\ 0 = 0 & t = 0 \end{cases}$

Donc l'ensemble de ces matrice est $E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} / x \in \mathbb{R} \right\}$

Comme $E_1 \neq \{0\}$ alors 1 est valeur propre de f.

De même et $f(M) = -M \Longleftrightarrow \begin{cases} z = -x & y = -t + y \\ z = -z & t = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 & 0 = 0 \\ z = 0 & t = 0 \end{cases}$

Donc l'ensemble de ces matrices est $E_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix} / y \in \mathbb{R} \right\} \neq \{0\}$

Donc -1 est valeur propre de f.

(e) Les sous espaces propres de f sont de dimension

- 2 pour la valeur propre 0
- 1 pour la valeur propre 1 (famille génératrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est donc une base)
- 1 pour la valeur propre -1 (base$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$

Comme $2 + 1 + 1 = 4$ alors
Conclusion : $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$

(f) Dans une base de vecteurs propres $\mathcal{B}$ la matrice de f sera $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

et celle de f^3 sera donc $\begin{pmatrix} 0^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^3 \end{pmatrix}$

Donc $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f^3) = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$
Conclusion : $\boxed{f \circ f \circ f = f}$

Exercice 3- D'après EML 2011

On considère l'application

$$f :]0; +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto f(x) = (x + \ln x) e^{x-1}.$$

Partie I : Étude et représentation graphique de f

(1) **Montrer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$. On note f' sa fonction dérivée. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, calculer $f'(x)$.**
La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme composée, somme et produit de fonction dérivables sur cet intervalle. Pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{x-1} + (x + \ln(x)) e^{x-1} = \left(1 + \frac{1}{x} + x + \ln(x)\right) e^{x-1}.$$

(2) **Établir que : $\forall x \in]0, +\infty[, \quad \ln x + \frac{1}{x} > 0$.**
Posons $h :]0; +\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto h(x) = \ln x + \frac{1}{x}$.

Cette fonction est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$, on a : $h'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x^2}$.
On a alors : $h'(x) \geq 0 \iff x \geq 1$, ce qui donne le tableau de variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

h est minorée par 1 donc h est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ ce qui prouve que

$$\forall x \in]0,+\infty[\,,\ \ln x + \frac{1}{x} > 0.$$

(3) **En déduire que :** $\forall x \in]0;+\infty[\,,\quad x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} > 0$**.**
Sur $]0;+\infty[$, on a : $x+1>0$ ce qui donne avec le résultat précédent :

$$\forall x \in]0;+\infty[\,,\quad x + \ln x + 1 + \frac{1}{x} > 0.$$

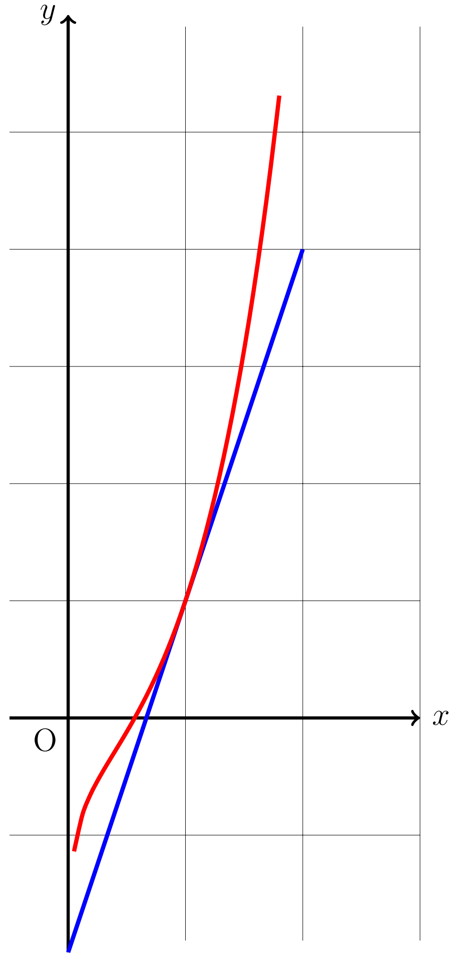
(4) **En déduire le sens de variation de f.**
Sur $]0;+\infty[$, on a : $e^{x-1} > 0$ et $\left(1 + \dfrac{1}{x} + x + \ln(x)\right) > 0$ d'après la question précédente.
Ainsi, $f'(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x} + x + \ln(x)\right) e^{x-1} > 0$ donc $\boxed{f \text{ est strictement croissant sur }]0;+\infty[.}$

(5) **Dresser le tableau de variation de f, comprenant la limite de f en 0 et la limite de f en $+\infty$.**
- $\lim_{x\to 0} x + \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{x-1} = \mathrm{e}^{-1}$ donc $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$ par produit.
- $\lim_{x\to +\infty} x + \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{x-1} = +\infty$ donc $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ par produit.

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

(6) **Tracer l'allure de la courbe représentative de f. On précisera la tangente au point d'abscisse 1.**
L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$ soit $y = 3(x-1)+1 =$ soit $\boxed{y = 3x-2}$.



Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à f.

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) **Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 2$.**
Montrons ce résultat par récurrence. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: u_n existe et $u_n \geq 2$.
- u_0 existe et $u_0 = 2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.
Ainsi, $u_n \geq 2 > 0$ donc $u_n \in \mathcal{D}f$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ existe.
De plus, on a par croissance de la fonction f sur $]0;+\infty[$:

$$\begin{aligned} u_n \geq 2 &\implies f(u_n) \geq f(2) \\ &\implies u_{n+1} \geq (2+\ln(2))\mathrm{e}^1 \geq 2 \text{ car } \ln(2) > 0 \text{ et } \mathrm{e}^1 > 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et le résultat est montré par récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \quad \text{existe et} \quad u_n \geq 2.$$

(2) **Établir, par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq e^n$.**
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: $u_n \geq \mathrm{e}^n$.
- $u_0 = 2 \geq 1 = \mathrm{e}^0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors :
  - $u_n + \ln(u_n) \geq \mathrm{e}^n + n \geq e^n$ car $u_n \geq \mathrm{e}^n$ par HR.
  - D'autre part, on a vu dans la question précédente que $u_n >\geq 2$ ce qui donne : $\mathrm{e}^{u_n - 1} \geq \mathrm{e}^1$.

On a alors par produit de termes positifs :

$$u_{n+1} = (u_n + \ln(u_n))\mathrm{e}^{u_n-1} \geq \mathrm{e}^n\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}^{n+1}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et le résultat est montré par récurrence : $\boxed{\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N},\ u_n \geq \mathrm{e}^n.}$

(3) **Quelle est la limite de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini ?**
On a vu que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geq \mathrm{e}^n$.
Or, $\lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}$ par minoration.

(4) **Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Montrer que la série de terme général v_n converge. On note S sa limite.**

- On a vu que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geq \mathrm{e}^n$ donc $v_n = \dfrac{1}{u_n} \leq \dfrac{1}{e^n}$.
  Ainsi, $v_n \leq \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$
- Or, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$ converge. C'est une série géométrique de raison $q = \dfrac{1}{e} \in]0;1[$.

D'après le TCSTP[1], on peut en déduire que $\boxed{\text{la série de terme général } v_n \text{ converge}}$.

(5) **Montrer que :** $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ |S - \sum_{k=0}^{n} v_k| \leq \dfrac{1}{(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\left|S - \sum_{k=0}^{n} v_k\right| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} v_k - \sum_{k=0}^{n} v_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k \qquad \text{car } v_k > 0$$

Or, on a vu que pour tout k de $\mathbb{N}$, $v_k \leq \left(\dfrac{1}{e}\right)^k$, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^k \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^{k+n+1} \\ &\leq \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^k = \frac{1}{e^{n+1}} \frac{1}{1-\frac{1}{e}} = \frac{1}{e^{n+1}} \frac{e}{e-1} = \frac{1}{(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^n}\end{aligned}$$

(6) (a) **Écrire une fonction Scilab, d'entête *function V=Suite_ V (n)*, prenant en paramètre un entier n et renvoyant la valeur de v_n.**

```
function Vn = Suite_V(n)
    u = 2
    for i=[1:n] then
        u = (u+log(u))*exp(u-1)
    end
    Vn = 1/u
endfunction
```

(b) **A l'aide de la question 5, compléter la fonction Scilab suivante pour qu'elle donne une valeur approchée de S à 10^{-3} près.**

```
function App = Approx_S()
    n = 0
    v = Suite_V(0)
    App = v
    e = 1/(exp(1)-1)
    while e > 0.001 do
        n = n+1
```

[1] Théorème de comparaison pour les séries à termes positifs

```
        v = Suite_V(n)
        App = App + v
        e = e\exp(1)
    endfunction
```

Partie III : Étude d'extremums locaux pour une fonction de deux variables associée à f

On considère l'application

$$F :]0;+\infty[\to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto F(x) = \int_1^x f(t)\,dt.$$

(1) **Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$, exprimer $F'(x)$ à l'aide de $f(x)$.**
Comme f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que F est la primitive de f qui s'annule en 1.
Ainsi, F est dérivable et on a pour tout $x \in]0;+\infty[$: $\boxed{F'(x) = f(x)}$.
Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, on en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$

Partie III : Étude d'extremums locaux pour une fonction de deux variables

On considère l'application de classe $\mathcal{C}^2$

$$G :]0;+\infty[^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \longmapsto G(x,y) = F(x) + F(y) - 2e^{\frac{x+y}{2}}.$$

start=2 **Pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$, exprimer les dérivées partielles premières $\partial_1(G)(x,y)$ et $\partial_2(G)(x,y)$ à l'aide de $f(x)$, $f(y)$ et $e^{\frac{x+y}{2}}$.**
La fonction G est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[^2$ et on a :

- $\partial_1(G)(x,y) = F'(x) + 0 - 2\frac{1}{2}e^{\frac{x+y}{2}} = f(x) - e^{\frac{x+y}{2}}$ soit : $\boxed{\partial_1(G)(x,y) = f(x) - e^{\frac{x+y}{2}}}$.
- De même : $\boxed{\partial_2(G)(x,y) = f(y) - e^{\frac{x+y}{2}}}$.

stbrt=2 (a) **Montrer que f est bijective.**
On a vu dans la partie I que la fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Ainsi, $\boxed{f \text{ est bijective}}$.

(b) **Établir que, pour tout $(x,y) \in]0;+\infty[^2$, (x,y) est un point critique de G si et seulement si :**

$$x = y \quad \text{et} \quad x + \ln x = e.$$

Commençons par remarquer que $]0;+\infty[^2$ est un ensemble ouvert.

(x,y) est un point critique de G ssi $\nabla G(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. On a alors :

$$\nabla G(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases}\partial_1 G(x,y)=0\\ \partial_2 G(x,y)=0\end{cases} \iff \begin{cases}f(x)-e^{\frac{x+y}{2}}=0\\ f(y)-e^{\frac{x+y}{2}}=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}f(x)-e^{\frac{x+y}{2}}=0\\ f(y)-f(x)=0 \quad L_2\leftarrow L_2-L_1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}f(x)-e^{\frac{x+y}{2}}=0\\ f(y)=f(x)\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}f(x)-e^{\frac{x+y}{2}}=0\\ x=y \qquad \text{car } f \text{ est bijective}\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}(x+\ln(x))\mathrm{e}^{x-1}=e^x\\ x=y\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x+\ln(x)=\mathrm{e}\\ x=y\end{cases}$$

Ainsi, $\boxed{(x,y) \text{ est un point critique de } G \text{ si et seulement si : } \quad x=y \quad \text{et} \quad x+\ln x=e.}$

stcrt=2 **Montrer que l'équation $x+\ln x=e$ d'inconnue $x\in\,]0;+\infty[$ admet une unique solution, que l'on notera α, et montrer que : $1<\alpha<e$.**

Posons $h:\,]0;+\infty[\,\to\mathbb{R}$, $\quad x\longmapsto h(x)=x+\ln(x)$.

Cette fonction est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x\in\,]0;+\infty[$, on a : $\quad h'(x)=1+\dfrac{1}{x}>0$.

Ainsi, h est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $]-\infty;+\infty[$ (car $\lim_{x\to 0}x+\ln(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}x+\ln(x)=+\infty$).

Comme $0\in\,]-\infty;+\infty[$, on en déduit que l'équation $x+\ln x=e$ admet une unique solution $\alpha\in\,]0;+\infty[$.

De plus, on a :

$h(1)=1<\mathrm{e}$ et $h(e)=\mathrm{e}+1>\mathrm{e}$ donc on a bien : $\boxed{1<\alpha<\mathrm{e}}$.

stdrt=2 **En déduire que G admet comme unique point critique le point (α,α) et montrer que la matrice Hessienne de G au point (α,α) s'écrit :**

$$H=\nabla^2(G)(\alpha,\alpha)=\begin{pmatrix}f'(\alpha)-\dfrac{\mathrm{e}^\alpha}{2} & -\dfrac{\mathrm{e}^\alpha}{2}\\ -\dfrac{\mathrm{e}^\alpha}{2} & f'(\alpha)-\dfrac{\mathrm{e}^\alpha}{2}\end{pmatrix}=f'(\alpha)I_2-\frac{\mathrm{e}^\alpha}{2}M$$

où $M=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$.

On a vu que (x,y) est un point critique de G ssi $\begin{cases}x+\ln(x)=\mathrm{e}\\ x=y\end{cases}$.

Or, d'après la question précédente, $x+\ln(x)=\mathrm{e}$ ssi $x=\alpha$.

Ainsi, $\boxed{G \text{ admet comme unique point critique le point } (\alpha,\alpha).}$

D'autre part, on a :

- $\partial_{1,1}(G)(x,y)=f'(x)-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}$
- $\partial_{1,2}(G)(x,y)=-\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}$

- $\partial_{1,2}(G)(x,y) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}$
- $\partial_{2,2}(G)(x,y) = f'(y) - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}}$

ce qui donne comme matrice Hessienne au point (x,y) :

$$\nabla^2(G)(x,y) = \begin{pmatrix} f'(x) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} - \frac{\mathrm{e}^{\alpha}}{2} & -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} \\ -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} & f'(y) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x+y}{2}} \end{pmatrix}$$

soit au point critique (α,α) :

$$\boxed{H = \nabla^2(G)(\alpha,\alpha) = \begin{pmatrix} f'(\alpha) - \frac{\mathrm{e}^{\alpha}}{2} & -\frac{\mathrm{e}^{\alpha}}{2} \\ -\frac{\mathrm{e}^{\alpha}}{2} & f'(\alpha) - \frac{\mathrm{e}^{\alpha}}{2} \end{pmatrix} = f'(\alpha)I_2 - \frac{\mathrm{e}^{\alpha}}{2}M}$$

stert=2 (a) **Déterminer le spectre de la matrice M puis en déduire que** $Sp(H) = \{f'(\alpha), f'(\alpha) - \mathrm{e}^{\alpha}\}$.

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On obtient facilement que $S(M) = \{0;2\}$. Ainsi, M est une matrice carrée d'ordre 2 qui admet deux valeurs propres distinctes donc M est diagonalisable. Ainsi, il existe une matrice P inversible et une matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ telles que $M = PDP^1$. On a alors :

$$H = f'(\alpha)I_2 - \frac{\mathrm{e}^{\alpha}}{2}M = P\left(f'(\alpha)I_2 - \frac{\mathrm{e}^{\alpha}}{2}D\right)P^{-1} = P\begin{pmatrix} f'(\alpha) & 0 \\ 0 & f'(\alpha) - \mathrm{e}^{\alpha} \end{pmatrix}P^{-1}$$

On en déduit que : $\boxed{Sp(H) = \{f'(\alpha), f'(\alpha) - \mathrm{e}^{\alpha}\}}$.

(b) **Montrer que $f'(\alpha) > \mathrm{e}^{\alpha}$.**

On a :

$$\begin{aligned} f'(\alpha) > \mathrm{e}^{\alpha} &\iff \frac{f'(\alpha)}{\mathrm{e}^{\alpha}} > 1 \\ &\iff \frac{\left(\alpha + \ln(\alpha) + 1 + \frac{1}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{\alpha}} > 1 \\ &\iff \left(\alpha + \ln(\alpha) + 1 + \frac{1}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{-1} > 1 \\ &\iff \alpha + \ln(\alpha) + 1 + \frac{1}{\alpha} > \mathrm{e} \end{aligned}$$

Or, $alpha$ est solution de l'équation $x + \ln(x) = \mathrm{e}$ donc on a : $\alpha + \ln(\alpha) = \mathrm{e}$. Ainsi, on a bien :

$$\alpha + \ln(\alpha) + 1 + \frac{1}{\alpha} = \mathrm{e} + 1 + \frac{1}{\alpha} > \mathrm{e} \quad \text{car } alpha > 0$$

et donc $\boxed{f'(\alpha) > \mathrm{e}^{\alpha}}$.

(c) **En déduire que G admet un extremum local et préciser sa nature.**

On a :

- $Sp(H) = \{f'(\alpha), f'(\alpha) - \mathrm{e}^{\alpha}\}$
- $f'(\alpha) > \mathrm{e}^{\alpha}$ donc $f'(\alpha) > 0$
- $f'(\alpha) > \mathrm{e}^{\alpha}$ donc $f'(\alpha) - \mathrm{e}^{\alpha} > 0$

Ainsi, $H = \nabla^2(G)(\alpha,\alpha)$ admet deux valeurs propres strictement positives donc $\boxed{G \text{ un minimum local en } (\alpha,\alpha)}$.