ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Surveillé n°4 - Sujet B (type EDHEC)

Durée: 4 heures

Exercice 1

(1) Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Montrer que si f est diagonalisable, alors f^2 est aussi diagonalisable.

On se propose dans la suite de montrer que la réciproque de cette assertion est fausse.
Pour ce faire, on considère l'endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix}.$$

(1) (a) Expliciter A^2 puis établir que $A^4 = I$. En déduire les valeurs propres possibles de A.
  (b) Donner une base (u) de $\text{Ker}(g - \text{Id})$.
  (c) Déterminer $\text{Ker}(g + \text{Id})$.
  (d) En déduire que g n'est pas diagonalisable.

(2) (a) Résoudre l'équation $A^2X = -X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}$ et en déduire une base $(v; w)$ de $\text{Ker}(g^2 + \text{Id})$.
  (b) Montrer que la famille $(u; v; w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
  (c) Écrire la matrice de g^2 dans la base $(u; v; w)$.
  (d) Conclure.

Exercice 2

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par

$$\forall x \in [n, +\infty[, \qquad f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} \mathrm{d}t.$$

(1) Étude de f_n.
  (a) Montrer que f_n est de classe C^1 sur $[n, +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n, +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n.
  (b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.
  (c) En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté u_n, élément de $[n, +\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

(2) Étude de la suite (u_n).
  (a) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
  (b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}.$$

(3) (a) Utiliser la question 2b) pour compléter les commandes `SciLab` suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier naturel n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

```
n=0
while .....................
    n=...........
end
disp(n)
```

(b) Le script affiche l'une des trois valeurs $n = 55$, $n = 70$ et $n = 85$. Préciser laquelle (on donne $\ln(10) \simeq 2,3$).

(4) On pose $v_n = u_n - n$.
(a) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
(b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1, on a

$$\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}.$$

(c) Vérifier ensuite que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right).$$

(d) Déduire de l'encadrement obtenu en 2b) que

$$u_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}.$$

Exercice 3

On dispose de trois pièces

- une pièce numérotée 0, pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut $\frac{1}{2}$;
- une pièce numérotée 1, donnant "pile" à coup sûr;
- une troisième pièce, numérotée 2, donnant "face" à coup sûr.

On choisit l'une de ces pièces au hasard et on la lance indéfiniment. Pour tout i de $\{0, 1, 2\}$, on note A_i l'événement : "on choisit la pièce numérotée i".
Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k l'événement : "on obtient "pile" au lancer numéro k" et on pose $F_k = \overline{P_k}$.

On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire Y , égale au rang d'apparition du premier "face". On convient de donner à X la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "pile" et de donner à Y la valeur 0 si l'on n'obtient jamais "face".

(1) (a) Déterminer $P(X = 1)$.
(b) Montrer que

$$\forall n \geqslant 2, \qquad P(X = n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

(c) En déduire la valeur de $P(X = 0)$.

(2) Montrer que X admet une espérance et la calculer .
(3) Montrer que $X(X - 1)$ possède une espérance. En déduire que X possède une variance et vérifier que

$$V(X) = \frac{4}{3}.$$

(4) Justifier que Y suit la même loi que X.

(5) (a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X = 1] \cap [Y = j]) = P([Y = j])$.

(b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P([X = i] \cap [Y = 1]) = P([X = i])$.

(6) Loi de $X + Y$.

(a) Expliquer pourquoi $X + Y$ prend toutes les valeurs entières positives sauf 0 et 2.

(b) Montrer que $P(X + Y = 1) = \frac{2}{3}$.

(c) Justifier que , pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, on a :

$$(X + Y = n) = ([X = 1] \cap [Y = n - 1]) \cup ([Y = 1] \cap [X = n - 1]).$$

(d) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3 :

$$P(X + Y = n) = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

(7) (`SciLab`).

On rappelle que, pour tout entier naturel m, l'instruction `grand(1,1,'uin',0,m)` renvoie un entier aléatoire compris entre 0 et m (ceci de façon équiprobable). On décide de coder "pile" par 1 et "face" par 0.

(a) Compléter le script `SciLab` suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
piece = grand(1,1,'uin', ......., ........)
x=0
if piece==0 then
    lancer=grand(1,1,'uin', ......, ......)
    while lancer==0
        lancer=.........
        x=..........
    end
else
    if piece==1 then
        x=.........
    end
end
disp(x)
```

(b) Justifier que le cas où l'on joue avec la pièce numérotée 2 ne soit pas pris en compte dans le script précédent.

Problème

On considère la fonction f définie pour tout x réel par

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } x \in [-1; 1] \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [-1; 1] \end{cases}$$

(1) (a) Calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. En déduire sans calcul $\displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Vérifier que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

On considère dorénavant une variable aléatoire X, définie sur un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$, et admettant f comme densité.

(2) (a) Établir l'existence de l'espérance de X, puis donner sa valeur.

(b) Établir l'existence de la variance de X, puis donner sa valeur.

(3) Montrer que la fonction de répartition de X, notée F_X , est définie par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{1}{2} + x + \dfrac{x^2}{2}, & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2}, & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$. On note F_Y sa fonction de répartition.

(4) (a) Donner la valeur de $F_Y(x)$ lorsque x est strictement négatif.
(b) Pour tout réel x positif ou nul, exprimer $F_Y(x)$ à l'aide de la fonction F_X.
(c) En déduire qu'une densité de Y est la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} 2(1-x), & \text{si } x \in [0;1] \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [0;1] \end{cases}$$

(d) Montrer que Y possède une espérance et une variance et les déterminer.

(5) On considère deux variables aléatoires U et V, elles aussi définies sur $(\Omega; \mathcal{A}; P)$, indépendantes et suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0;1]$.
On pose $I = \min(U, V)$. On **admet** que I est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ et on note F_I la fonction de répartition de I.

(a) Expliciter $F_I(x)$ pour tout réel x.
(b) En déduire que I suit la même loi que Y.
(c) Compléter la déclaration de fonction `SciLab` suivante pour qu'elle simule la loi de Y .

```
function Y=DS4()
    U=............
    V=............
    if ............. then
        Y=..........
    else
        Y=..........
    end
endfunction
```

(6) On considère plus généralement n variables aléatoires $X_1, X_2, ..., X_n$ (où $n \geq 2$), toutes définies sur $(\Omega; \mathcal{A}; P)$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0;1]$. On pose $I_n = \min(X_1, X_2, ..., X_n)$.

(a) Déterminer la fonction de répartition de I_n.
(b) Montrer que la suite de (I_n) converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.