Devoir Surveillé n°4 - Sujet B (type EDHEC)

Solution

Exercice 1 - D'après EDHEC 2012

(1) Soit f un endomorphisme diagonalisable. Il existe une base dans laquelle la matrice de f est diagonale et que l'on peut noter D. Mais alors, la matrice de f^2 dans cette même base est D^2 qui est encore une matrice diagonale. Comme f^2 peut être représenté par une matrice diagonale, cet endomorphisme est encore diagonalisable.

(2) (a) Ces calculs sont faciles, il suffit juste de les faire

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^4 = A^2 \cdot A^2 = I.$$

Il est alors clair que $X^4 - 1$ est polynôme annulateur de A. Ainsi, les valeurs propres de A sont à chercher **parmi** les racines de $X^4 - 1$ qui sont 1 et -1:

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{-1; 1\}.$$

(b) On cherche une base en résolvant le système correspondant:

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}) &\iff \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & -8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} x - 2y + z &=& 0 \\ 2x - 6y + 4z &=& 0 \\ 3x - 8y + 5z &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff x = y = z \\ &\iff X = x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on a donc

$$\mathrm{Ker}(g - \mathrm{Id}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

En prenant $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a le vecteur cherché. En particulier, 1 est bien valeur propre et $\dim(E_1) = 1$.

(c) On procède de la même manière pour déterminer $\mathrm{Ker}(g+\mathrm{Id})$:

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \mathrm{Ker}(g+\mathrm{Id}) \iff \begin{pmatrix}0&2&-1\\2&-5&4\\3&-8&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z&=&0\\ 2x-4y+4z&=&0\\ 3x-8y+7z&=&0\end{array}\right.$$
$$\iff x=y=z=0$$

ce qui donne
$$\mathrm{Ker}(g+\mathrm{Id})=\{0\}.$$
On voit en particulier que -1 n'est pas valeur propre de g.

(d) On connait, d'après les questions précédentes, le spectre de A; $\mathrm{Sp}(A)=\{1\}$. Mais comme
$$\dim(E_1)=1\neq 3,$$
la matrice A (ou de manière équivalente l'endomorphisme g) n'est pas diagonalisable.

(3) (a) On résout $A^2X=-X$:

$$X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \mathrm{Ker}(g^2+\mathrm{Id}) \iff \begin{pmatrix}1&-2&2\\2&-3&2\\2&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$
$$\iff 2x-2y+2z=0$$
$$\iff X=y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Les deux vecteurs
$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$
engendrent donc $\mathrm{Ker}(g^2+\mathrm{Id})$. Étant de plus non colinéaires, ils en forment donc une base. On les note respectivement v et w.

(b) Pour montrer que la famille $\{u;v;w\}$ forme une base de $\mathbb{R}^3$, il suffit de montrer qu'elle forme une famille libre.

$$\alpha u+\beta v+\gamma w=0 \iff \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=0$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} \alpha+\beta-\gamma&=&0\\ \alpha+\beta&=&0\\ \alpha+\gamma&=&0\end{array}\right.$$
$$\iff \alpha=\beta=\gamma=0$$

et la famille est bien libre et forme donc une base de $\mathbb{R}^3$.

(c) Par définitions des vecteurs u,v,w on a $g^2(u)=g(g(u))=g(u)=u$, $g^2(v)=-v$ et $g^2(w)=-w$. Il suit que la matrice de g^2 dans cette nouvelle base est donnée par
$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

et c'est une matrice diagonale. Ainsi, g^2 est diagonalisable. Or, on a montré que g ne l'était pas, justifiant ainsi que la réciproque à la toute première question est fausse via ce contre-exemple.

Exercice 2 - D'après EDHEC 2016

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par

$$\forall x \in [n, +\infty[, \qquad f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} \mathrm{d}t.$$

(1) Étude de f_n.

(a) D'après le théorème fondamental de l'analyse, la fonction $t \to e^{\sqrt{t}}$ étant continue sur $[0, +\infty[$, f_n est sa primitive sur $[0, +\infty[$ qui s'annule en $x = n$. Il suit que f_n est donc de classe C^1 et que, pour tout $x \in [n, +\infty[$,

$$f_n'(x) = e^{\sqrt{x}} > 0.$$

Sa dérivée étant strictement positive, f_n est strictement croissante sur $[n, +\infty[$.

(b) Pour tout $x \in [n, +\infty[$, $e^{\sqrt{t}} > 1$. En intégrant sur $[n, x]$ (avec $n \leq x$), on obtient (par positivité de l'intégrale)

$$\forall x \in [n, +\infty[\ ,\ f_n(x) = \int_n^x e^{\sqrt{t}} \mathrm{d}t > \int_n^x 1 \mathrm{d}t = x - n.$$

Comme $(x - n) \to +\infty$ (lorsque $x \to +\infty$), par comparaison, on a

$$\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

(c) On utilise le théorème de la bijection. f_n est continue et strictement croissante sur $[n, +\infty[$, $f_n(n) = 0$ et $f_n(x) \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$ donc f_n réalise une bijection de $[n, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

Comme $1 \in [0, +\infty[$, il admet un unique antécédent par f_n, noté u_n et appartenant à $[n, +\infty[$, et ainsi $f_n(u_n) = 1$.

(2) Étude de la suite (u_n).

(a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [n, +\infty[$, donc $u_n \geq n$ et, par comparaison

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

(b) Par définition de u_n,

$$f_n(u_n) = \int_n^{u_n} e^{\sqrt{t}} \mathrm{d}t = 1.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq n$ et tout$t \in [n, u_n]$,

$$\begin{aligned} e^{\sqrt{n}} &\leq e^{\sqrt{t}} \\ &\leq e^{\sqrt{u_n}} \end{aligned}$$

Comme $n \leq u_n$, il suit que

$$\int_n^{u_n} e^{\sqrt{n}} \mathrm{d}t \leq \int_n^{u_n} e^{\sqrt{t}} dt \leq \int_n^{u_n} e^{\sqrt{u_n}} \mathrm{d}t.$$

Et donc

$$(u_n - n) e^{\sqrt{n}} \leq f_n(u_n) = 1 \leq (u_n - n) e^{\sqrt{u_n}}$$

En divisant l'inégalité de gauche par $e^{\sqrt{n}}$ et celle de droite par $e^{\sqrt{u_n}}$, on obtient bien

$$e^{-\sqrt{u_n}} \leq (u_n - n) \leq e^{-\sqrt{n}}.$$

(3) (a) Puisque 2b) donne
$$0 \leq (u_n - n) \leq e^{-\sqrt{n}},$$
on aura $(u_n - n) \leq 10^{-4}$ dès que $e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4}$, on va donc à partir de $n = 0$, *incrémenter* n, tant que $e^{-\sqrt{n}} > 10^{-4}$.

```
n=0
while  (exp(-sqrt(n))> 10^(-4)
    n=n+1
end
disp(n)
```

(b) On a
$$e^{-\sqrt{n}} \leq 10^{-4} \iff -\sqrt{n} \leq -4\ln(10) \iff n \geq (4\ln(10))^2 \simeq 16.(2.3)^2 \simeq 84.64.$$
Le script précédent va donc afficher pour n la valeur 85.

(4) $v_n = u_n - n$.

(a) D'après 2b),
$$0 \leq (u_n - n) \leq e^{-\sqrt{n}},$$
et comme
$$\lim_{n\to+\infty} e^{-\sqrt{n}} = 0,$$
on a par encadrement aussi
$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} (u_n - n) = 0.$$

(b) Soit $x \geq -1$
$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2} &\iff 1 + x \leq (1 + \frac{x}{2})^2 \qquad \text{(croissance de } t \to t^2 \text{ sur } \mathbb{R}^+)\\ &\iff 1 + x \leq 1 + x + \frac{x^2}{4} \qquad \text{(ce qui est vrai.)}\end{aligned}$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned}e^{-\sqrt{u_n}} \geq e^{-\sqrt{n}} \exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}) &\iff e^{-\sqrt{u_n}+\sqrt{n}} \geq \exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}) \qquad \text{(croissance de } t \to t^2 \text{ sur } \mathbb{R}^+)\\ &\iff \sqrt{u_n} - \sqrt{n} \leq \frac{v_n}{2\sqrt{n}} \qquad \text{(décroissance de } t \to e^{-t})\\ &\iff \sqrt{v_n + n} \leq \sqrt{n} + \frac{v_n}{2\sqrt{n}} \qquad \text{car } (u_n = v_n + n)\\ &\iff \sqrt{\frac{v_n}{n} + 1} \leq 1 + \frac{v_n}{2n} \qquad \text{(division par } \sqrt{n} > 0)\end{aligned}$$
Comme $\frac{v_n}{n} \geq 0$, la dernière inégalité est vérifiée en vertu du 4b) et donc la première aussi.

(d) On divise l'encadrement obtenu en 2b) par $e^{-\sqrt{n}}$, ce qui donne
$$\frac{e^{-\sqrt{u_n}}}{e^{-\sqrt{n}}} \leq \frac{(u_n - n)}{e^{-\sqrt{n}}} \leq 1.$$
Et donc, en utilisant 4c),
$$\exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}) \leq \frac{e^{-\sqrt{u_n}}}{e^{-\sqrt{n}}} \leq \frac{(u_n - n)}{e^{-\sqrt{n}}} \leq 1.$$
Comme $v_n \to 0$, on a aussi
$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{v_n}{2\sqrt{n}} = 0$$

et
$$\lim_{n\to+\infty} \exp(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}) = 1,$$
qui fournit (par encadrement)
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(u_n - n)}{e^{-\sqrt{n}}} = 1.$$
par conséquent:
$$u_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}.$$

Exercice 3 - D'après EDHEC 2018

(1) (a) L'évènement $(X = 1)$ signifie qu'on a *Pile* dès le premier lancer. Ceci dépend naturellement de la pièce lancée. Commençons par remarquer que le choix de la pièce se faisant au hasard, on a
$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{3}.$$
Ainsi, en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'évènements $\{A_i,\ i \in [\![1;3]\!]\}$, on obtient
$$P(X = 1) = P_{A_1}(X = 1)P(A_1) + P_{A_2}(X = 1)P(A_2) + P_{A_3}(X = 1)P(A_3).$$
Le texte donne les valeurs des probabilités conditionnelles ci-dessus. Plus précisément, on obtient
$$P(X = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

(b) On commence par écrire
$$(X = n) = \bigcap_{k=1}^{n-1} F_k \cap P_n.$$
On va à nouveau utiliser la formule des probabilités totales avec le même s.c.e. Mais, on observe que, la pièce numérotée 1 amenant (presque) sûrement un *Face*,
$$P_{A_1}(X = n) = 0.$$
Comme $n \geq 2$, un lancer avec la pièce numérotée 2 amènerait un *Pile* dès le premier coup et on a une autre probabilité conditionnelle nulle $P_{A_2}(X = n) = 0$. Ainsi, pour tout $n \geq 2$, par indépendance des lancers successifs
$$P(X = n) = P_{A_0}(X = n)P(A_0) = \frac{1}{3}\prod_{k=1}^{n-1} P_{A_0}(F_k)P_{A_0}(P_n) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

(c) Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) = 1$, on a
$$\begin{aligned} P(X = 0) &= 1 - P(X = 1) - \sum_{n=2}^{+\infty} P(X = n) \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1 - 1/2} - 1 - \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(2) Les valeurs prises par X étant positives ou nulles, celle-ci admet une espérance si et seulement si la série de terme général $kP(X=k)$ converge. Or, pour $k \geq 2$,

$$kP(X=k) = k\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{6}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

et on reconnait le multiple du terme général d'une série géométrique dérivée, de raison $1/2$ donc convergente. Ainsi, X admet une espérance et

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{(1-1/2)^2} - 1\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

(3) Le théorème de transfert affirme que $X(X-1)$ admet une espérance si et seulement si la série de terme général $k(k-1)P(X=k)$ est convergente. On va reconnaitre cette fois un multiple du terme général de la série géométrique dérivée deux fois (toujours de raison $1/2$ donc toujours convergente). Pour $k \geq 2$,

$$k(k-1)P(X=k) = \frac{1}{12}k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2}.$$

Ainsi, $X(X-1)$ admet une espérance et celle-ci vaut

$$E(X(X-1)) = \frac{1}{12}\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} = \frac{1}{12} \times \frac{2}{(1-1/2)^3} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}.$$

Mais, $E(X(X-1)) = E(X^2 - X) = E(X^2) - E(X)$. Par linéarité de l'espérance, il suit que X admet un moment d'ordre 2 (donc une variance) et par la formule de König-Huygens, on a

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = E(X(X-1)) + E(X) - E(X)^2 = \frac{4}{3} + 1 - 1 = \frac{4}{3}.$$

(4) La situation est totalement symétrique: une pièce équilibrée, une pièce qui donne presque sûrement *Pile* et une autre presque sûrement *Face*. Ainsi, le même raisonnement où on permutera *Pile* avec *Face* et A_1 avec A_2 permet de voir que les lois de X et Y sont les mêmes.

(5) (a) Soit $j \geq 2$, on observe que $[X=1] \cap [Y=j]$ signifie qu'on a obtenu un *Pile* au premier coup et le premier *Face* au $j-$ième coup et donc nécessairement après une succession de *Pile*, ce qui est donc la même chose que $[Y=j]$ d'où l'égalité des probabilités.
(b) Par symétrie, on obtient de même, pour $i \geq 2$, $P([X=i] \cap [Y=1]) = P(X=i)$.

(6) (a) X et Y étant toutes deux à valeurs positives, si $X+Y=0$ alors $X=Y=0$. Mais une prise de valeur nulle pour X signifie que l'on a toujours obtenu dès *Face*, et ce dès le premier lancer, ainsi $Y = 1 \neq 0$. Donc on ne peut pas avoir $X+Y=0$. De plus, si $X+Y=2$ alors ou bien $X=Y=1$ (ce qui est impossible: le premier lancer ne peut pas être simultanément *Pile* et *Face*), ou bien $X=0$ et $Y=2$ (ou inversement). Mais $X=0$ signifie (comme dit ci-avant) qu'on obtient que des *Face* et que donc $Y=1$ et $X+Y \neq 2$. Dans le cas ou X ou Y vaut 0, on a donc $X+Y=1$ et si $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$,

$$[X+Y=k] = \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} F_j \cap P_k\right) \cup \left(\bigcap_{j=1}^{k-1} P_j \cap F_k\right),$$

est un évènement possible. On a bien $(X+Y)(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0;2\}$.

(b) Comme énoncé ci-dessus

$$\begin{aligned}P(X+Y=1) &= P([X=0]\cap[Y=1])+P([X=1]\cap[Y=0])\\ &= P(X=0)+P(Y=0)\\ &= 2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

(c) Soit $n\geq 3$. Remarquant que le résultat du premier lancier décompose l'univers, *i.e.* $\{[X=1],[Y=1]\}$ forme un s.c.e, on a

$$\begin{aligned}[X+Y=n] &= ([X+Y=n]\cap[X=1])\cup([X+Y=n]\cap[Y=1])\\ &= ([Y=n-1]\cap[X=1])\cup([X=n-1]\cap[Y=1]).\end{aligned}$$

(d) Par incompatibilité des deux évènements ci-dessus,et par la question 5a,

$$\begin{aligned}P(X+Y=n) &= P\left([Y=n-1]\cap[X=1]\right)+P\left([X=n-1]\cap[Y=1]\right)\\ &= P(Y=n-1)+P(X=n-1)\\ &= 2\times\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

(7) (a) On complète sans mal le script `SciLab`. La variable `piece` correspond au numéro de la pièce lancée et reçoit donc le résultat de la simulation d'une loi uniforme sur $[\![0;2]\!]$.

```
piece=grand(1,1,'uin', 0, 2)
x=0
if piece == 0 then //si on lance la piece 0
    lancer=grand(1,1,'uin', 0, 1)
    while lancer==0 //tant qu'on a des FACE
        lancer=grand(1,1,'uin',0,1) //on relance
        x=x+1
    end
    else
       if piece==1 then //si on lance la piece 1
           x=1 //on aura que des PILE
    end
disp(x)
```

(b) Si on lance la pièce numérotée 2, on aura jamais *Pile* donc $X=0$, déjà initialisé.

Problème - D'après EDHEC 2013

(1) (a) Pour tout $x\in[0;1]$, on a $|x|=x$. D'où

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(1-x)\mathrm{d}x=\left[x-\frac{x^2}{2}\right]_0^1=1-\frac{1}{2}$$

C'est-à-dire

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

Pour l'intégrale $\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x$, on a, en faisant le changement de variable affine $u=-x$:

$$\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_1^0 f(-u)(-\mathrm{d}u)=\int_0^1 f(-u)\mathrm{d}u.$$

Or, $f(u)=1-|-u|=1-|u|=f(u)$. D'où

$$\int_{-1}^0 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}.$$

Remarque : En fait, faire le calcul directement (sans se servir de l'intégrale précédente) était tout aussi long.

(b) On vérifie les hypothèses d'une densité de probabilité:

- La fonction f est **continue** sur $]-1;1[$ comme somme de fonctions continues. Elle est également continue sur $]-\infty;-1[$ et sur $]1;+\infty[$ (car elle y est nulle). Donc f est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{-1;1\}$, qui est $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.
- Pour tout $x\in[-1;1]$, on a $|x|\leqslant 1$, et donc $f(x)\geqslant 0$. De plus, pour tout $x\in\,]-\infty;-1[\,\cup\,]1;+\infty[$, on a $f(x)\geqslant 0$ également (car $f(x)=0$). Donc finalement, on a $f(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
- Les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} f(x)\mathrm{d}x$ et $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ sont évidemment convergentes et égales à 0 (car f est nulle sur les intervalles correspondants). De plus, par relation de Chasles

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)d\mathrm{x} &= \int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2} \quad \text{(question précédente)}\\ &= 1.\end{aligned}$$

  Par relation de Chasles toujours, on en déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est convergente et vaut 1.

On déduit des 3 points ci-dessus que f est une densité de probabilité.

(2) (a) Les intégrales $\int_{-\infty}^{-1} xf(x)\mathrm{d}x$ et $\int_1^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ sont évidemment absolument convergentes et égales à 0 (car f est nulle sur les intervalles correspondants). Quant à l'intégrale $\int_{-1}^{-1} xf(x)\mathrm{d}x$, elle est (absolument) convergente également car il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé (ce n'est même pas une intégrale impropre).

On en déduit que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente et que donc X admet une espérance. De plus,

$$\begin{aligned}E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\\ &= \int_{-1}^{1} xf(x)\mathrm{d}x \quad \text{car } f \text{ est nulle sur }]-\infty;-1[\text{ et sur }]1;+\infty[\\ &= \int_{-1}^{1} x(1-|x|)\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{0} x(1-|x|)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} x(1-|x|)\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{0} x(1+x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} x(1-x)\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{0} (x+x^2)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1} (x-x^2)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}\\ &= \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

(b) De la même manière que pour l'espérance à la question précédente, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente. Donc X admet un moment d'ordre 2, ce qui implique que X admet une variance. De plus,

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \qquad \text{(formule de König-Huygens)} \\
&= E(X^2) \qquad \text{car } E(X) = 0 \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x \quad \text{(théorème du transfert)} \\
&= \int_{-1}^{1} x^2 f(x)\mathrm{d}x \quad \text{car } f \text{ est nulle sur }]-\infty; -1[\text{ et sur }]1; +\infty[\\
&= \int_{-1}^{1} x^2(1-|x|)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{0} x^2(1-|x|)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x^2(1-|x|)dx \\
&= \int_{-1}^{0} x^2(1+x)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} x^2(1-x)dx \\
&= \int_{-1}^{0} (x^2+x^3)\mathrm{d}x + \int_{0}^{1} (x^2-x^3)dx \\
&= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} \\
&= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

(3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$. On calcule cette intégrale en différenciant les cas

- Si $x < -1$, alors l'intervalle $]-\infty; x]$ est inclus dans $]-\infty; -1[$ sur lequel f est nulle. Donc $F_X(x) = 0$.
- Si $-1 \leqslant x \leqslant 0$, alors, par relation de Chasles

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t \\
&= 0 + \int_{-1}^{x} (1-|t|)\mathrm{d}t \\
&= \int_{-1}^{x} (1+t)\mathrm{d}t \quad \text{car } t \leqslant 0 \text{ pour tout } t \in [-1; x] \\
&= \left[t + \frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{x} \\
&= \left(x + \frac{x^2}{2}\right) - \left(-1 + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2}.
\end{aligned}$$

- Si $0 < x \leqslant 1$, alors, par relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{-1} f(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} f(t)\mathrm{d}t \\
&= 0 + \frac{1}{2} + \int_0^x (1-|t|)\mathrm{d}t \quad \text{(voir question 1.(a))} \\
&= \frac{1}{2} + \int_0^x (1-t)dt \quad \text{car } t \geqslant 0 \text{ pour tout } t \in [0;x] \\
&= \frac{1}{2} + \left[t - \frac{t^2}{2}\right]_0^x \\
&= \frac{1}{2} + \left(x - \frac{x^2}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}.
\end{aligned}$$

- Enfin, si $x > 1$, alors, on a clairement $F_X(x) = 1$.

En conclusion, on a bien

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2} + x + \frac{x^2}{2}, & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}, & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(4) (a) Si $x < 0$, alors $0 \leqslant P(Y \leqslant x) \leqslant P(Y < 0)$. Or, $P(Y < 0) = 0$ (car $Y = |X|$ et une valeur absolue n'est jamais strictement négative). Donc $P(Y \leqslant x) = 0$, c'est-à-dire $F_Y(x) = 0$.

(b) Soit $x \geqslant 0$. Alors,

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= P(Y \leqslant x) \\
&= P(|X| \leqslant x) \\
&= P(-x \leqslant X \leqslant x) \\
&= P(X \leqslant x) - P(X < -x) \\
&= P(X \leqslant x) - P(X \leqslant -x) \qquad \text{car } X \text{ est une variable aléatoire à densité}
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$F_Y(x) = F_X(x) - F_X(-x).$$

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque. On calcule $F_Y(x)$ en différenciant les cas :
- Si $x < 0$, alors $F_Y(x) = 0$ (question 4.(a)).
- Si $x = 0$, alors $F_Y(x) = F_X(x) - F_X(-x)$ d'après la question précédente, *i.e* $F_Y(0) = F_X(0) - F_X(0) = 0$.
- Si $x \in]0;1]$, alors,

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= F_X(x) - F_X(-x) \quad \text{(question précédente)} \\
&= \left(\frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + (-x) + \frac{(-x)^2}{2}\right) \quad \text{car } 0 < x \leqslant 1 \text{ et } -1 \leqslant -x \leqslant 0 \\
&= 2x - x^2.
\end{aligned}$$

- Si $x > 1$, alors

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= F_X(x) - F_X(-x) \quad \text{(question précédente)} \\ &= 1 - 0 \quad \text{car } x > 1 \text{ et } -x < -1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

En résumé

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1 \\ 2x - x^2, & \text{si } x \in [0;1] \\ ,1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On constate alors que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0;1\}$, $F'_Y(x)$ coïncide avec $g(x)$ (où g est la fonction donnée dans l'énoncé). Donc Y admet pour densité la fonction g définie par

$$g(x) = \begin{cases} 2(1-x), & \text{si } x \in [0;1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(d) De même qu'aux questions 2.(a) et 2.(b), étant donné que g est nulle en dehors de $[0;1]$, les intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\mathrm{d}x$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2g(x)\mathrm{d}x$ sont absolument convergentes. Donc Y admet une espérance et une variance. De plus

$$\begin{aligned} E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 xg(x)\mathrm{d}x \qquad \text{car } g \text{ est nulle en dehors de } [0;1] \\ &= \int_0^1 2x(1-x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (2x - 2x^2)\mathrm{d}x \\ &= \left[x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2g(x)\mathrm{d}x \qquad \text{(théorème du transfert)} \\ &= \int_0^1 x^2g(x)\mathrm{d}x \qquad \text{car } g \text{ est nulle en dehors de } [0;1] \\ &= \int_0^1 2x^2(1-x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (2x^2 - 2x^3)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

(5) (a) On procède comme on a l'habitude de faire (et tout cela a été très bien expliqué en classe)

$$\begin{aligned} F_I(x) &= P(I \leqslant x) \\ &= 1 - P(I > x) \\ &= 1 - P\Big([U > x] \cap [V > x]\Big) \\ &= 1 - P(U > x)P(V > x) \quad \text{par indépendance de } U \text{ et } V \\ &= 1 - (1 - F_U(x))(1 - F_V(x)) \\ &= 1 - (1 - F_U(x))^2 \quad \text{car } U \text{ et } V \text{ suivent la même loi} \end{aligned}$$

Or, d'après le cours connu sur le bout des doigts,

$$F_U(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ x, & \text{si } x \in [0;1] \\ 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Par conséquent, on obtient

$$F_I(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 2x - x^2, & \text{si } x \in [0;1] \\ 1; & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(b) On constate que $F_I(x) = F_Y(x)$ pour tout x réel. Autrement dit, les variables aléatoires I et Y suivent la même loi.

(c) Sans difficulté

```
function Y=DS4()
     U=rand()
     V=rand()
     if U<=V then
          Y=U
     else
          Y=V
     end
endfunction
```

(6) (a) Notons F_{I_n} la fonction de répartition de I_n. De même qu'à la question précédente, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} F_{I_n}(x) &= P(I_n \leqslant x) \\ &= 1 - P(I_n > x) \\ &= 1 - P\Big([X_1 > x] \cap \ldots \cap [X_n > x]\Big) \\ &= 1 - P(X_1 > x) \times \ldots \times P(X_n > x) \quad \text{par indépendance de } X_1, \ldots, X_n \\ &= 1 - (1 - F_U(x))^n \quad \text{car } X_1, \ldots, X_n \text{ suivent la même loi que } U \end{aligned}$$

Et donc, en remplaçant F_U comme à la question précédente, on obtient, cette fois

$$F_{I_n}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1-x)^n, & \text{si } x \in [0;1] \\ 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(b) Si $x \in]0;1]$, on a $(1-x) \in [0;1[$, et donc $(1-x)^n \to 0$. On a alors $F_{I_n}(x) \to 1$. Si $x = 0$, on a $F_{I_n}(x) = 0$ quel que soit $n \geqslant 2$, et donc $F_{I_n}(x) \to 0$. Les autres cas étant évidents, on donc, finalement

$$F_{I_n}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} G(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On constate alors que G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z certaine, égale à 0 ($i.e$ telle que $P(Z = 0) = 1$). La suite (I_n) converge en loi vers une variable aléatoire certaine égale à 0.