ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Facultatif n°1

Durée: 3 heures

Exercice 1 - D'après ECRICOME 2011 (DS4 ECE2, 2017/2018)

On dit qu'une matrice A carrée de taille n est une matrice nilpotente s'il existe un entier naturel k non nul tel que :

$$A^{k-1} \neq 0_n \quad \text{et} \quad A^k = 0_n,$$

où 0_n représente la matrice carrée nulle d'ordre n. Soit A une matrice carrée de taille n, on dit que le couple (Δ, N) est une *décomposition de Dunford* de A lorsque :

$$\begin{cases} \Delta \text{ est un matrice diagonalisable} \\ N \text{ est une matrice nilpotente} \\ \Delta N = N\Delta \text{ et } A = N + \Delta \end{cases}$$

(1) On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de A.

Dans toute la suite de l'exercice, on pose :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) (a) Déterminer les valeurs propres de A.
(b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

(3) On considère les matrices colonnes

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(a) Calculer les produits ΔX_1, ΔX_2 et ΔX_3.
(b) Justifier que la matrice Δ est diagonalisable et déterminer une matrice P inversible telle que $P^{-1}\Delta P = D$.

(4) (a) Établir que N est une matrice nilpotente.
(b) Vérifier que (Δ, N) est une décomposition de Dunford de la matrice A.
(c) En utilisant une formule bien connue, donner l'expression de A^n en fonction des puissances de Δ, de N et de n.
(d) Établir que, pour tout entier naturel $k \geq 1$, $\Delta^k N = N$.
(e) Proposer une décomposition de Dunford de A^n.

Exercice 2 - D'après EDHEC 2012

On **admet** que, si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ, alors on a

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}a_j=\ell.$$

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0=0,\qquad u_{n+1}=\frac{u_n^2+1}{2}.$$

(1) (a) Montrer que, pour tout entier naturel n on a : $0\leq u_n<1$.
  (b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  (c) Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donner sa limite.

(2) Pour tout entier naturel n on pose : $v_n=1-u_n$.
  (a) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{v_{n+1}}-\frac{1}{v_n}\right)=\frac{1}{2}.$$

  (b) Utiliser le résultat admis en début d'exercice pour trouver un équivalent de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.
  (c) En déduire que

$$u_n=1-\frac{2}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(3) (a) Écrire une fonction `SciLab` qui renvoie la valeur de u_n.
  (b) En déduire un programme, rédigé en `SciLab`, qui permet de déterminer et d'afficher la plus petite valeur de n pour laquelle on a $1-u_n<10^{-3}$.

Exercice 3 - D'après DS4, ECE2, 2017/2018

On désigne par λ, un réel strictement positif et on considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f(x)=\lambda\,|x|\,e^{-\lambda x^2}.$$

(1) (a) Montrer que f est paire.
  (b) Établir la convergence et calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$$

  (c) Montrer que la fonction f peut être considérée comme densité d'une variable aléatoire X que l'on suppose, dans la suite, définie sur un certain espace probabilisé $(\Omega;\mathcal{A};P)$.

(2) (a) Justifier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x.$$

  (b) En déduire que la variable aléatoire X possède une espérance, notée $E(X)$, et donner sa valeur.

(3) (a) Montrer, grâce à une intégration par parties, que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$$

converge et donner sa valeur.

(b) En déduire que la variable aléatoire X possède une variance, notée $V(X)$, et donner sa valeur.

(4) On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur l'espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$.

(a) Donner l'expression de la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y à l'aide de la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X .

(b) Déterminer une densité f_Y de Y, puis vérifier que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ .

(c) Retrouver alors sans calcul la valeur de $V(X)$.

(5) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0; 1[$. On pose $W = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ et on admet que West une variable aléatoire.

(a) Déterminer la fonction de répartition de W et en déduire la loi suivie par la variable aléatoire W.

(b) Vérifier que la probabilité que X prenne des valeurs positives est égale à la probabilité que X prenne des valeurs négatives.

On suppose, dans la suite, que le paramètre λ est inconnu et on souhaite l'estimer en utilisant la loi de Y.

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère un *échantillon* $Y_1, Y_2, .., Y_n$ de la loi de Y, c'est à dire des variables $Y_1, Y_2, .., Y_n$ définies sur $(\Omega; \mathcal{A}; P)$, indépendantes et de même loi que Y.

(6) On considère des réels $x_1, x_2, .., x_n$ strictement positifs, ainsi que la fonction L , à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie sur $]0; +\infty[$ par

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} f_Y(x_k), \qquad \lambda > 0.$$

(a) Exprimer $L(\lambda)$, puis $\ln(L(\lambda))$ en fonction de λ, $x_1, ..., x_n$.

(b) On considère la fonction φ, définie pour tout réel $\lambda > 0$ par

$$\varphi(\lambda) = n\ln(\lambda) - \lambda \sum_{=1}^{n} x_k.$$

Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera z et que l'on exprimera en fonction de $x_1, x_2, ..., x_n$. Que peut-on dire de z pour la fonction L?

(7) On pose dorénavant, toujours avec $n \geq 2$,

$$Z_n = \frac{n}{Y_1 + Y_2 + ... + Y_n}.$$

On admet que Z_n est une variable aléatoire définie, elle aussi, sur l'espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$. La suite $(Z_n)_{n\geqslant 2}$ est appelée *estimateur du maximum de vraisemblance* pour λ.

On admet que la variable aléatoire $\overline{Y}_n = Y_1 + Y_2 + ... + Y_n$ admet pour densité la fonction f_n définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ \dfrac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t}, & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}.$$

(a) En remarquant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t = 1$, montrer que Z_n possède une espérance et que

$$E(Z_n) = \frac{n}{n-1}\lambda.$$

(b) Déterminer une variable aléatoire Z_n', fonction simple de Z_n, telle que $E(Z_n') = \lambda$.