Un exercice de probabilités continues

Densités CSP

On dit qu'une densité de probabilité f est CSP($\mathbb{R}_+^*$) lorsque :

(i) f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
(ii) f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$.
(iii) f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

(1) Soit X une variable aléatoire à densité. On note f une densité de X et F sa fonction de répartition. Montrer que si f est CSP($\mathbb{R}_+^*$), l'équation $F(x) = 1/2$ admet une solution unique sur $]0; +\infty[$, notée m.

Cet unique réel, que l'on notera m, sera appelé *médiane* de X.

(2) Soit $\lambda > 0$. Dans cette question seulement, on suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre λ.
  (a) Donner une densité f de X, ainsi que sa fonction de répartition F.
  (b) Vérifier que f est CSP($\mathbb{R}_+^*$) puis montrer que la médiane de X est : $m = \ln(2)/\lambda$.
  (c) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.
  Quelle est la loi de la variable aléatoire $V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$?
  (d) Écrire une fonction en `SciLab` d'entête `function V = exponentielle(lambda)` qui, prend en paramètre un réel *lambda* strictement positif et simule la loi exponentielle de paramètre *lambda*.

(3) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

  (a) En utilisant une propriété de la loi exponentielle de paramètre 1, montrer que

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x = 1$$

  puis en déduire que f est une densité de probabilité qui est CSP($\mathbb{R}_+^*$).
  On note X une variable aléatoire dont une densité f.

(b) Montrer que la fonction de répartition F de X est donnée par

$$F\left(x\right)=\begin{cases}0, & \text{si } x<0\\ 1-(1+x)e^{-x}, & \text{si } x\geq 0\end{cases}.$$

(c) Montrer, sans chercher à la calculer, que la médiane m de X vérifie $1\leq m\leq 2$.
On donne : $0,3<e^{-1}<0,4$ *et* $0,1<e^{-2}<0,15$.

On se propose, dans la suite de cette question, de calculer une valeur approchée de m.
On introduit pour cela la fonction g définie sur $[1,2]$ par : $g(x)=\ln(2x+2)$.
On considère également la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases}u_0=1\\ u_n=g(u_{n-1}) \quad \text{pour } n>0\end{cases}.$$

(d) En revenant à la définition de m, montrer que $g(m)=m$.

(e) Montrer que si x appartient à $[1,2]$ alors : $g(x)$ appartient à $[1,2]$ et $|g'(x)|\leq\dfrac{1}{2}$.

(f) En déduire que : $|g(x)-m|\leq\dfrac{1}{2}|x-m|$.

(g) Montrer alors que : $|u_{n+1}-m|\leq\dfrac{1}{2}|u_n-m|$ puis que : $|u_n-m|\leq\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

(h) Quelle est la limite de la suite u_n ?