ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Surveillé *der des der*

Lundi 08 Avril 2019
Durée : 4 heures

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} a\ln(t), & \text{si } t \in]0,1] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

où a est un réel qui sera déterminé dans la première question.

(1) Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité.

Dans ce qui suit, on note X une variable aléatoire admettant la fonction f pour densité. On note F_X la fonction de répartition de X.

(2) (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, X admet un moment d'ordre n et en préciser la valeur.
(b) Donner la valeur de l'espérance et de la variance de X.

(3) Calculer la fonction de répartition de X.
(4) On considère la variable aléatoire $Y = -\ln(X)$.
(a) Vérifier que la fonction de répartition de Y est donnée par :

$$F_Y(x) = \begin{cases} 1-(x+1)e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(b) Montrer que Y est une variable aléatoire à densité et déterminer une densité de Y.
(c) Vérifier que Y admet une espérance dont on précisera la valeur.

Exercice 2

On note E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les quatre fonctions f_0, f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = e^x,\ f_3(x) = xe^x.$$

On note : $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$.

(1) On souhaite montrer dans cette question que la famille $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ est une famille libre de F. Pour cela, on considère $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = a + bx + ce^x + dxe^x.$$

(a) Pour tout x réel, calculer $h'(x)$, $h''(x)$ et vérifier que $h'''(x) = (c + 3d)e^x + dxe^x$.

(b) Montrer que si $h(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors les réels a, b, c et d vérifient le système:

$$\begin{cases} a + c &= 0 \\ b + c + d &= 0 \\ c + 2d &= 0 \\ c + 3d &= 0 \end{cases}$$

On pourra évaluer les fonctions de la question précédentes pour une valeur de x bien choisie.

(c) En déduire que que $\mathcal{B}$ est une famille libre de F.

(2) Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de F et préciser la dimension de F.

(3) On note f' la dérivée de f et on considère l'application Φ définie pour tout $f \in F$ par :

$$\Phi(f) = f'.$$

(a) Montrer que pour tout $f \in F$, on a $\Phi(f) \in F$.

(b) En déduire que Φ est un endomorphisme de F.

(c) Montrer que la matrice M de Φ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Φ est-il un automorphisme de F ?

(e) Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\Phi)$.

(f) En déduire la dimension de l'image de Φ puis déterminer une base de $\Im(\Phi)$.

(g) Déterminer le spectre de Φ.

(h) L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

(i) Calculer M^2 et M^3.
Conjecturer l'expression de la matrice M^n pour $n \geq 2$ puis prouver votre conjecture.

(j) En déduire, pour $n \geq 2$, l'expression de la dérivée n-ième de la fonction $g : x \mapsto (1 + x)e^x$.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{2n + 2}{2n + 5} u_n.$$

(1) Montrer que (u_n) et décroissante. Montrer ensuite qu'elle converge vers une limite $\ell \in [0; 1]$.

(2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On introduit les suites, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = n^\alpha u_n, \quad \text{et} \quad w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n).$$

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$w_n = (\alpha + 1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{5}{2n}\right).$$

(b) En déduire, à l'aide du développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1+u)$ que

$$w_n \sim \frac{2\alpha - 3}{2n} + \frac{\beta}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to +\infty,$$

où β est un nombre réel que l'on exprimera en fonction de α.

(c) Montrer qu'il existe une unique valeur α_0 de α que l'on précisera pour laquelle la série $\sum w_n$ converge.

(d) Exprimer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} w_k$ en fonction de u_{n+1}.

(e) En déduire qu'il existe un réel strictement positif C tel que

$$u_n \sim \frac{C}{n^{\alpha_0}}, \quad n \to +\infty.$$

(f) Quelle est alors la valeur de ℓ?

Problème

Dans tout l'exercice, on dispose d'une pièce amenant *Pile* avec la probabilité 1/3.
Les parties I et II de cet exercice sont indépendantes.

Partie I. Conditionnement par une loi de Poisson

Soit λ un réel strictement positif et N une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ.
On suppose que N donne le nombre de lancers successifs de la pièce.
Autrement dit, pour tout $i \in \mathbb{N}$, si $N = i$ alors on lance i fois de suite la pièce et on note :

- X le nombre de *Pile* obtenus lors de ces i lancers.
- Y le nombre de *Face* obtenus lors de ces i lancers.

(1) Soit $i \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[N = i]$.

(2) Montrer que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = \sum_{i=k}^{+\infty} P_{[N=i]}(X = k)P(N = i).$$

(3) Prouver que X suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre.
On admet de même que Y suit la loi de Poisson de paramètres $2\lambda/3$.

(4) Que vaut $X + Y$?
Prouver que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

(5) Toujours en considérant la variable aléatoire $X + Y$, calculer la covariance de X et de N.
Comment peut-on interpréter le signe de cette covariance ?

Partie II. Conditionnement par une loi binomiale

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On lance n fois de suite la pièce et on note N le nombre de lancers ayant amené *Face*.

On relance alors la pièce autant de fois que l'on a obtenu *Face* lors de la première série de lancers.

Autrement dit, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, si $N = i$ alors on relance i fois de suite la pièce et on note

- X le nombre de *Pile* obtenus lors de ces i lancers.
- Y le nombre de *Face* obtenus lors de ces i lancers.

(6) Déterminer la loi de N.

(7) *Dans cette question seulement on suppose que* $n = 2$.
 (a) Expliciter la loi de N.
 (b) Déterminer la table de la loi conjointe de N et de X.
 (c) En déduire la loi marginale de X ainsi que la covariance de X et de N.

(8) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[N = i]$.

(9) Montrer que si $0 \leq k \leq i \leq n$ alors :
$$\binom{i}{k}\binom{n}{i} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}.$$

(10) Montrer que X suit la loi binomiale de paramètres n et $2/9$.
On admet de même que Y suit la loi binomiale de paramètres n et $4/9$.

(11) Prouver que les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

(12) En considérant la variable aléatoire $X + Y$, calculer la covariance de X et de Y.
Comment peut-on interpréter le signe de cette covariance ?

Partie III - Simulations

On rappelle qu'en `SciLab` :

- L'instruction `grand(1,1,'poi',lambda)`, permet de simuler une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ.
- L'instruction `grand(1,1,'bin',n,p)` permet de simuler une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p.

(13) On considère le code suivant :

```
lambda=5
n=5

tot=100000
simulX=zeros(1,tot)
simulY=zeros(1,tot)
for k=1:tot                    // Boucle 1
   i=grand(1,1,'poi',lambda)
   simulX(k)=grand(1,1,'bin',i,1/3)
   simulY(k)=i-simulX(k)
   end

loiX=zeros(1,n)
loiY=zeros(1,n)
```

```
for k=1:n                      // Boucle 2
   loiX(k)=sum(simulX==k)/tot
   loiY(k)=sum(simulY==k)/tot
   end

loiXY=zeros(n,n)
for i=1:n                      // Boucle 3
for j=1:n
   loiXY(i,j)=sum((simulX==i).*(simulY==j))/tot
   end
   end

disp(loiXY-loiX'*loiY)
```

(a) Que contiennent les variables `simulX` et `simulY` à l'issue de la `Boucle 1`?
(b) Que contiennent les variables `loiX` et `loiY` à l'issue de la `Boucle 2`?
Que représente l'entier `n`?
Si l'on effectue l'instruction `sum(loiX)` dans la console, obtient-on un nombre proche de 1? Pourquoi?
(c) Que contient la variable `loiXY` à l'issue de la `Boucle 3`?
(d) Que contient la variable `loiXY-loiX'*loiY` qui est affiché à la fin du programme?

(14) On considère à présent le code suivant :

```
   n=5

   tot=100000
   simulX=zeros(1,tot)
   simulY=zeros(1,tot)
   for k=1:tot do
       i=grand(1,1,'bin',n,2/3)
       simulX(k)=grand(1,1,'bin',i,1/3)
       simulY(k)=i-simulX(k)
   end

   loiX=zeros(1,n)
   loiY=zeros(1,n)
for k=1:n do
    loiX(k)=sum(simulX==k)/tot
    loiY(k)=sum(simulY==k)/tot
    end

loiXY=zeros(n,n)
for i=1:n do
for j=1:n do
    loiXY(i,j)=sum((simulX==i).*(simulY==j))/tot
    end
    end

disp(loiXY-loiX'*loiY)
```

On exécute le programme de la question 1. et le programme ci-dessus et on obtient les affichages suivants :

```
- 0.0001640    0.0000507  - 0.0005183    0.0010968  - 0.0001602
  0.0004776    0.0001959  - 0.0006646  - 0.0007210    0.0001024
- 0.0001503    0.0008200  - 0.0003913  - 0.0003431  - 0.0001648
  0.0001912  - 0.0004923    0.0001760    0.0002693  - 0.0001822
  0.0000293    0.0000116    0.0001525  - 0.0001479    0.0001535
```

et :

```
- 0.0125378    0.0089848    0.0196443  - 0.0011307  - 0.0069815
  0.0227074    0.0195960  - 0.0198493  - 0.0250676  - 0.0040048
  0.0191111  - 0.0012535  - 0.0181958  - 0.0072081  - 0.0011516
  0.0033778  - 0.0031647  - 0.0025532  - 0.0010114  - 0.0001616
- 0.0001321  - 0.0002087  - 0.0001684  - 0.0000667  - 0.0000107
```

Déterminer l'affichage correspondant à chacun des deux programmes. Justifier.

(15) On ajoute le code suivant à la suite du programme de la question précédente. Que permet-il de calculer? Justifier.

```
I=1:n
J=1:n
IJ=I'*J
disp(sum(IJ.*loiXY)-sum(I.*loiX)*sum(J.*loiY))
```