ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Surveillé *der des der*

Éléments de correction

Exercice 1

(1) Observons que

- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et en 1;

- f est positive sur $\mathbb{R}$ si et seulement si a est négatif;

- f est nulle en dehors de $]0,1]$, donc les intégrales $\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t$ et $\int_{1}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ convergent et valent 0.

  Il s'agit alors d'étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, qui est impropre en 0.

  Prenant $t \mapsto t\ln(t) - t$ comme primitive[1] de $t \mapsto \ln(t)$, on a pour tout $x \in]0,1]$:

$$\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t = a\int_x^1 \ln(t)\mathrm{d}t = a\left[t\ln(t) - t\right]_x^1 = a\left(-1 - x\ln(x) + x\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -a$$

  Donc $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut $-a$. Par conséquent

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad a = -1.$$

Au final, f est une densité de probabilité si et seulement si $a = -1$.

(2) (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après le théorème du transfert, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
X \text{ admet un moment d'ordre } n \quad &\Longleftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)\mathrm{d}t \text{ converge absolument}\\
&\Longleftrightarrow \quad \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t \text{ converge absolument (car } f \text{ est nulle en dehors de }]0,1])\\
&\Longleftrightarrow \quad \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t \text{ converge (car } t^n f(t) \geq 0 \text{ si } t \in]0,1])
\end{aligned}$$

[1] On peut aussi, dans le cas où on ne se souvient pas de celle-ci, faire une IPP

On calcule, pour tout $x \in]0,1]$:

$$\int_x^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = -\int_x^1 t^n \ln(t)\mathrm{d}t.$$

On pose

$$\begin{array}{lll} u(t) = \ln(t) & \rightsquigarrow & u'(t) = \frac{1}{t} \\ v'(t) = t^n & \rightsquigarrow & v(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} \end{array}$$

u et v étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[x,1]$, on peut effectuer une intégration par parties.

$$\int_x^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = -\int_x^1 t^n \ln(t)\mathrm{d}t = -\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t)\right]_x^1 + \int_x^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} + \frac{1}{n+1}\int_x^1 t^n\mathrm{d}t.$$

On obtient

$$\int_x^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = \frac{x^{n+1}\ln(x)}{n+1} + \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Donc $\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut $1/(n+1)^2$. On en déduit que X admet un moment d'ordre n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et on a

$$m_n(X) = E(X^n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t)\mathrm{d}t = 0 + \frac{1}{(n+1)^2} + 0$$

ou encore

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad m_n(X) = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

(b) Comme X admet des moments d'ordre 1 et 2, X admet une espérance et une variance. On a

$$E(X) = m_1(X) = \frac{1}{4}, \qquad E(X^2) = m_2(X) = \frac{1}{9}$$

ce qui donne

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7}{144}.$$

(3) La densité f de X est nulle en dehors de $]0,1]$, donc $X(\Omega) =]0,1]$. On a donc immédiatement

$$F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \le 0 \\ 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Pour $x \in]0,1]$, on a

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\mathrm{d}t = -\int_0^x \ln(t)\mathrm{d}t = -\lim_{A\to 0}\int_A^x \ln(t)\mathrm{d}t = -\lim_{A\to 0}\,[t\ln(t) - t]_A^x = x - x\ln(x).$$

Au final,

$$F_X(x) = P(X \le x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \le 0 \\ x - x\ln(x), & \text{si } 0 < x \le 1 \\ 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(4) On considère la variable aléatoire $Y = -\ln(X)$.

(a) On rappelle que : $X(\Omega) =]0,1]$ donc : $\big(\ln(X)\big)(\Omega) =]-\infty, 0]$ et $Y(\Omega) = [0, +\infty[$. On a donc immédiatement, pour tout $x < 0$, $F_Y(x) = P(Y \le x) = 0$.

Pour $x \ge 0$, on a par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$

$$F_Y(x) = P(Y \le x) = P(-\ln(X) \le x) = P(\ln(X) \ge -x) = P(X \ge e^{-x}) = 1 - F_X(e^{-x}).$$

Comme $x \ge 0$, on a $e^{-x} \in]0,1]$ et :

$$F_Y(x) = 1 - F_X(e^{-x}) = 1 - \big(e^{-x} - e^{-x}\ln(e^{-x})\big) = 1 - (e^{-x} + xe^{-x}) = 1 - (x+1)e^{-x}.$$

On obtient bien

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ 1-(x+1)e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

(b) F_Y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0. *A fortiori* F_Y est continue sur $]-\infty;0[$ et sur $[0;+\infty[$. De plus :

$$\lim_{x\to 0^+} F_Y(x) = 1 - e^0 = 0 = \lim_{x\to 0^-} F_Y(x) = F_Y(0).$$

Donc F_Y est aussi continue en 0 et finalement F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On en déduit que Y est une variable aléatoire à densité et une densité g de Y et donnée par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = F_Y'(x) = \begin{cases} -e^{-x} + (x+1)e^{-x}, & \text{si } x > 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

En choisissant arbitrairement la valeur en 0 et en simplifiant, il vient

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(c) On a les équivalence

$$\begin{aligned} Y \text{ admet une espérance } &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\mathrm{d}t \text{ converge absolument} \\ &\iff \int_0^{+\infty} tg(t)\mathrm{d}t \text{ converge absolument (car } g \text{ est nulle sur }]-\infty,0]) \\ &\iff \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\mathrm{d}t \text{ converge (car } tg(t) \geq 0 \text{ si } t \in [0,+\infty[) \end{aligned}$$

Or si T est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, on sait que T admet un moment d'ordre 2 donné par

$$E(T^2) = \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\mathrm{d}t = V(T) + (E(T))^2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1} = 2.$$

En particulier $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\mathrm{d}t$ converge et vaut 2. Donc Y admet une espérance et on a :

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\mathrm{d}t = 2.$$

Exercice 2

On note E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les quatre fonctions f_0, f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = e^x,\ f_3(x) = xe^x.$$

On note : $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$.

(1) **On souhaite montrer dans cette question que la famille $\mathcal{B} = (f_0, f_1, f_2, f_3)$ est une famille libre de F.**
Pour cela, on considère $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ et h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = a + bx + c\mathrm{e}^x + dx\mathrm{e}^x$.

(a) **Pour tout x réel, calculer $h'(x)$, $h''(x)$ et vérifier que $h'''(x) = (c+3d)\mathrm{e}^x + dx\mathrm{e}^x$.**
La fonction h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $h'(x) = b + c\mathrm{e}^x + d\mathrm{e}^x + dx\mathrm{e}^x = b + (c+d)\mathrm{e}^x + dx\mathrm{e}^x$
- $h''(x) = (c+2d)\mathrm{e}^x + dx\mathrm{e}^x$

- $h'''(x) = (c+3d)\mathrm{e}^x + dx\mathrm{e}^x$

(b) **Montrer que si $h(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors les réels a, b, c et d vérifient le système :** $\begin{cases} a+c &= 0 \\ b+c+d &= 0 \\ c+2d &= 0 \\ c+3d &= 0 \end{cases}$.

On pourra évaluer les fonctions de la question précédentes pour une valeur de x bien choisie. Si h est nulle alors toutes ses dérivées sont nulles et on a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} h(x) = a + bx + c\mathrm{e}^x + dx\mathrm{e}^x = 0 \\ h'(x) = b + (c+d)\mathrm{e}^x + dx\mathrm{e}^x = 0 \\ h''(x) = (c+2d)\mathrm{e}^x + dx\mathrm{e}^x = 0 \\ h'''(x) = (c+3d)\mathrm{e}^x + dx\mathrm{e}^x = 0 \end{cases}$$

donc en évaluant ces expressions pour $x = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} a+c = 0 \\ b+c+d = 0 \\ c+2d = 0 \\ c+3d = 0 \end{cases}$$

(c) **En déduire que que $\mathcal{B}$ est une famille libre de F.**
Comme $h = af_0 + bf_1 + cf_2 + df_3$, il s'agit de montrer que si $h = 0$ alors $a = b = c = d = 0$. Or, on a vu dans la question précédente que si $h = 0$, alors

$$\begin{cases} a+c = 0 \\ b+c+d = 0 \\ c+2d = 0 \\ c+3d = 0 \end{cases}$$

On résout facilement ce système ($L_4 - L_3$ donne $d = 0$) et on obtient $a = b = c = d = 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{la famille } \mathcal{B} \text{ est une famille libre de } F.}$

(2) **Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de F et préciser la dimension de F.**
Par définition, $F = \mathrm{Vect}\,(f_0, f_1, f_2, f_3)$ donc la famille $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de F. Comme elle est libre d'après la question précédente, la famille $\mathcal{B}$ est une base de F et $\dim(F) = 4$.

(3) **On note f' la dérivée de f et on considère l'application Φ définie pour tout $f \in F$ par :**

$$\Phi(f) = f'$$

(a) **Montrer que pour tout $f \in F$, on a : $\Phi(f) \in F$.**
Soit $f \in F$. Comme $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de F, la fonction f est de la forme $f(x) = a + bx + c\mathrm{e}^x + dx\mathrm{e}^x$. On a alors d'après les calculs de la première question :

$$\Phi(f)(x) = f'(x) = b + (c+d)\mathrm{e}^x + dx\mathrm{e}^x \in \mathrm{Vect}\,(f_0, f_1, f_2, f_3) = F$$

Donc $\boxed{\text{pour tout } f \in F, \quad \Phi(f) \in F.}$

(b) **En déduire que Φ est un endomorphisme de F.**
Soient $(f, g) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\Phi(f + \lambda g) = (f + \lambda g)' = f' + \lambda g' = \Phi(f) + \lambda \Phi(g)$$

Donc Φ est une application linéaire.
De plus, d'après la question précédente, pour tout $f \in F$, $\quad \Phi(f) \in F$ donc Φ est un endomorphisme de F.

(c) **Montrer que la matrice M de Φ dans la base $\mathcal{B}$ est : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.**

On a :

- $\Phi(f_0) = f_0' = 0$
- $\Phi(f_1) = f_1' = f_0 \quad$ car $(x)' = 1$.
- $\Phi(f_2) = f_2' = f_2 \quad$ car $(e^x)' = e^x$.
- $\Phi(f_3) = f_3' = f_2 + f_3 \quad$ car $(xe^x)' = e^x + xe^x$.

ce qui donne bien : $\boxed{Mat_{\mathcal{B}}(\Phi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M.}$

(d) **Φ est-il un automorphisme de F ?**
La matrice M n'est pas inversible (car sa première colonne est nulle) donc Φ n'est pas bijectif donc $\boxed{\Phi \text{ n'est pas un automorphisme de } F.}$

(e) **Déterminer une base de $\text{Ker}(\Phi)$.**

Déterminons d'abord une base de $\text{Ker}(M)$. Soit $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$. On a :

$$X \in \text{Ker}(M) \iff MX = 0 \iff \dots \iff b = c = d = 0$$

Donc $\text{Ker}(M) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Comme $M = Mat_{\mathcal{B}}(\Phi)$, on en déduit que $\boxed{\text{Ker}(\Phi) = \text{Vect}\,(f_0)}$.

La famille (f_0) est génératrice de $\text{Ker}(\Phi)$ et libre (un vecteur non nul) donc c'est une base de $\text{Ker}(\Phi)$.

(f) **En déduire la dimension de l'image de Φ puis déterminer une base de $\text{Im}\,(\Phi)$.**
D'après le théorème du rang, on a :

$$\dim(F) = \dim(\text{Ker}(\Phi)) + \dim(\text{Im}(\Phi))$$

Or, $\dim(\text{Ker}(\Phi)) = 1$ d'après la question précédente et $\dim(F) = 4$, ce qui donne : $\boxed{\dim(\text{Im}(\Phi)) = 3}$.
De plus, comme $\mathcal{B}$ est une base de F, on a :

$$\text{Im}(\Phi) = \text{Vect}\,(\Phi(f_0), \Phi(f_1), \Phi(f_2), \Phi(f_3))$$

puis d'après les calculs de la question 3c :

$$\text{Im}(\Phi) = \text{Vect}\,(0, f_0, f_2, f_2 + f_3) = \text{Vect}\,(f_0, f_2, f_2 + f_3)$$

Ainsi, la famille $(f_0, f_2, f_2 + f_3)$ est une famille génératrice de $\text{Im}(\Phi)$ composée de trois vecteurs avec $\dim(\text{Im}(\Phi)) = 3$. Donc $\boxed{\text{la famille } (f_0, f_2, f_2 + f_3) \text{ une base de } \text{Im}(\Phi)}$.

(g) **Déterminer le spectre de Φ.**
On a : $Sp(\Phi) = Sp(M)$.
Or, la matrice M est triangulaire donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.
Ainsi : $\boxed{\text{Sp}(\Phi) = Sp(M) = \{0, 1\}}$.

(h) **L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?**
Raisonnons sur M.
On a déjà vu que $\dim(\text{Ker}(M)) = 1$ donc $\dim(E_0(M)) = 1$.

Déterminons la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 1.
On a clairement :

$$\dim(\mathrm{Im}(M-I)) = \mathrm{rg}(M-I) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = 3$$

Ainsi, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathrm{Ker}(M-I)) = 4 - \dim(\mathrm{Im}(M-I)) = 1 \quad \text{soit} \quad \dim(E_1(M)) = 1.$$

Ainsi, on a :

$$\dim(E_0(M)) + \dim(E_1(M)) = 2 \neq 4$$

donc la matrice M n'est pas diagonalisable donc Φ n'est pas diagonalisable.

(i) **Calculer M^2 et M^3.**
Conjecturer l'expression de la matrice M^n pour $n \geq 2$ puis prouver votre conjecture.
On a :

$$M^2 = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

On conjecture que pour tout $n \geq 2$, on a

$$M^n = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&n\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

ce que l'on montre facilement par récurrence.

(j) **En déduire, pour $n \geq 2$, l'expression de la dérivée n-ième de la fonction $g : x \mapsto (1+x)\mathrm{e}^x$.**
On remarque que pour tout $f \in F$, on a : $\Phi^n(f) = f^{(n)}$.
Ainsi, la dérivée n-ième de la fonction g est donnée par $\Phi^n(g)$.
Or, $g(x) = (1+x)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x = f_2(x) + f_3(x)$ est représentée dans la base $\mathcal{B}$ par le vecteur : $G = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}$.

On a alors : $M^nG = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&n\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\n+1\\1\end{pmatrix}$

et comme M^n est la matrice de Φ^n dans la base $\mathcal{B}$, on en déduit que : $\boxed{g^{(n)}(x) = (n+1)e^x + xe^x}$.

Exercice 3 - Inspiré d'un exercice d'Oral avec préparation de HEC

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+5}u_n.$$

(1) On commence par montrer, par récurrence immédiate que $u_n > 0$ pour tout n. C'est vrai pour $n = 0$ et si c'est vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$, le produit de quantités strictement positives le restant, c'est encore vrai au rang $n+1$. Ensuite, on observe que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+5} \leq \frac{2n+5}{2n+5} = 1$$

et donc $u_{n+1} \leq u_n$. Ainsi, (u_n) est bien décroissante. Il suit que $u_n \leq u_1 = 1$. On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0;1]$. Comme la suite est décroissante et minorée par 0, le théorème de convergence monotone permet d'affirmer que (u_n) converge vers une limite ℓ. De l'encadrement sur les termes de la suite ci-dessus obtenus, on peut conclure que $\ell \in [0;1]$. (*Le passage à la limite transforme les inégalités en inégalités larges.*)

(2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On introduit les suites, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n = n^\alpha u_n, \quad \text{et} \quad w_n = \ln(v_{n+1}) - \ln(v_n).$$

(a) C'est un calcul, utilisant les propriétés du log. Sans difficulté.

$$\begin{aligned}
w_n &= \ln\left((n+1)^\alpha u_{n+1}\right) - \ln\left(n^\alpha u_n\right) \\
&= \alpha \ln(n+1) + \ln(2) + \ln((n+1)) + \ln(u_n) - \ln(2n+5) - \alpha \ln(n) - \ln(u_n) \\
&= \alpha \ln(n+1) + \ln((n+1)) - \ln(n+5/2) - \alpha \ln(n) \\
&= \alpha \ln(n+1) + \ln((n+1)) - \ln\left(1 + \frac{5}{2n}\right) - \alpha \ln(n) - \ln(n) \\
&= (\alpha+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{5}{2n}\right)
\end{aligned}$$

(b) On rappelle que, pour $u \to 0$,

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2), \qquad u \to 0.$$

Comme

$$\frac{1}{n} \to 0 \quad \text{et} \quad \frac{5}{2n} \to 0, \quad n \to +\infty,$$

on a

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad \ln\left(1 + \frac{5}{2n}\right) = \frac{5}{2n} - \frac{25}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Il suit que

$$\begin{aligned}
w_n &= (\alpha+1)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{5}{2n} - \frac{25}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{2\alpha-3}{n} + \frac{21-4\alpha}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

et on a bien la formule attendue en posant

$$\beta = \frac{21-4\alpha}{8}.$$

(c) Pour $\alpha \neq 3/2$, $2\alpha - 3 \neq 0$ et donc

$$w_n \sim \frac{2\alpha-3}{n}, \ n \to +\infty.$$

Par critère d'équivalence pour les séries, comme $\sum \frac{2\alpha-3}{n}$ diverge (multiplie de la série harmonique), il suit que $\sum w_n$ diverge. En revanche, si $\alpha = 3/2$, alors $\beta \neq 0$ et

$$w_n \sim \frac{\beta}{n^2}, \ n \to +\infty.$$

Cette fois, par convergence de la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$, le critère d'équivalence affirme que $\sum w_n$ converge. On a donc bien

$$\sum w_n \text{ converge} \iff \alpha = \alpha_0 = \frac{3}{2}.$$

(d) On reconnait une somme télescopique. En effet

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} w_k &= \sum_{k=1}^{n} (\ln(v_{k+1} - \ln(v_k)) \\ &= \ln(v_{n+1}) - \ln(v_1) \qquad \text{(par telescopage)} \\ &= \ln\left((n+1)^{\alpha_0} u_{n+1}\right) - \ln\left(2^{\alpha_0} \cdot (2/5)\right)\end{aligned}$$

(e) D'après la question précédente,

$$\ln\left(n^{\alpha_0} u_n\right) = \sum_{k=1}^{n-1} + \ln(v_1).$$

Comme la série $\sum w_n$ converge, en notant S sa somme, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(n^{\alpha_0} u_n\right) = S + \ln(v_1).$$

En notant alors $C = \exp(S + \ln(v_1))$, on a bien

$$\frac{n^{\alpha_0} u_n}{C} \longrightarrow 1 \iff u_n \sim \frac{C}{n^{\alpha_0}}.$$

(f) On a, en particulier, que

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{C}{n^{3/2}} = 0.$$

Problème

Partie I

(1) Soit $i \in \mathbb{N}$.

Sachant $[N = i]$, on reconnait un schéma binomial où le succès correspond à obtenir *Pile* (avec probabilité $1/3$). Sachant $[N = i]$, X donne le nombre de succès obtenus lors de i épreuves identiques et indépendantes. On en déduit que

$$\text{sachant } [N = i],\ X \text{ suit la loi binomiale } \mathcal{B}\left(i, \frac{1}{3}\right).$$

(2) Soit $k \in \mathbb{N}$.

D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $\{[N = i] : i \in \mathbb{N}\}$, on a

$$P(X = k) = \sum_{i=0}^{+\infty} P_{[N=i]}(X = k) P(N = i).$$

Or si $i < k$, alors il est impossible d'obtenir k fois *Pile* lors de i lancers. Donc si $i < k$, alors $P_{[N=i]}(X = k) = 0$. Il ne reste donc que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(X = k) = \sum_{i=k}^{+\infty} P_{[N=i]}(X = k) P(N = i).$$

(3) Le nombre N de lancers effectués pouvant être aussi grand que l'on veut (puisque $N(\Omega) = \mathbb{N}$), le nombre de *Pile* obtenus peut aussi être aussi grand que l'on veut.

Donc $X(\Omega) = \mathbb{N}$. Fixons $k \in \mathbb{N}$. On a d'après la question précédente

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= \sum_{i=k}^{+\infty} \binom{i}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{i-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \\
&= e^{-\lambda} \left(\frac{1}{3}\right)^k \lambda^k \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{i!}{k!\,(i-k)!} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-k} \frac{\lambda^{i-k}}{i!} \\
&= e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^k \frac{1}{k!} \sum_{i=k}^{+\infty} \frac{1}{(i-k)!} \left(\frac{2\lambda}{3}\right)^{i-k} \\
&\underset{j=i-k}{=} e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^k \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{2\lambda}{3}\right)^j \\
&= e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^k \frac{1}{k!} e^{2\lambda/3}
\end{aligned}$$

En réorganisant les termes, il vient

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = e^{-\lambda/3} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^k.$$

On en déduit que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{3}\right)$.

(4) $X + Y$ donne le nombre de Piles et de Faces obtenus, autrement dit donne le nombre total de lancers effectués. Ainsi

$$X + Y = N.$$

On a alors pour tous $k, j \in \mathbb{N}$:

$$P\big([X = k] \cap [Y = j]\big) = P\big([X = k] \cap [X+Y = k+j]\big) = P\big([X = k] \cap [N = k+j]\big) = P_{[N=k+j]}(X = k)P(N = k+j).$$

D'après la Question 1., on obtient pour tous $k, j \in \mathbb{N}$

$$P\big([X = k] \cap [Y = j]\big) = \binom{k+j}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{k+j-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{k+j}}{(k+j)!} = \frac{1}{k!\,j!} e^{-\lambda} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^k \left(\frac{2\lambda}{3}\right)^j.$$

En remarquant que $e^{-\lambda} = e^{-\lambda/3} \times e^{-2\lambda/3}$, il vient pour tous $k, j \in \mathbb{N}$:

$$P\big([X = k] \cap [Y = j]\big) = e^{-\lambda/3} \frac{1}{k!} \left(\frac{\lambda}{3}\right)^k \times e^{-2\lambda/3} \frac{1}{j!} \left(\frac{2\lambda}{3}\right)^j = P(X = k) \times P(Y = j).$$

On en déduit que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

(5) On a par les propriétés de la covariance

$$\mathrm{Cov}(X, N) = \mathrm{Cov}(X, X+Y) = \mathrm{Cov}(X, X) + \mathrm{Cov}(X, Y) = V(X) + \mathrm{Cov}(X, Y).$$

Comme X et Y sont indépendantes, on a $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$. On sait de plus que $X \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{3}\right)$, donc :

$$\mathrm{Cov}(X, N) = \frac{\lambda}{3} + 0 \qquad \text{c'est-à-dire :} \quad \boxed{\mathrm{Cov}(X, N) = \frac{\lambda}{3}}.$$

$\mathrm{Cov}(X, N) > 0$, ce qui traduit le fait que les variables aléatoires X et N varient en moyenne dans le même sens : en effet plus l'on fait de lancers (N grand) plus l'on va obtenir de Piles en moyenne (X grand), et inversement.

Partie II

(1) On reconnait à nouveau un schéma binomial et $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \dfrac{2}{3}\right)$.

(2) *Dans cette question seulement on suppose que* $n = 2$.

(a) On a

$$\forall\, i \in \{0,1,2\},\quad P(N=i) = \binom{2}{i}\left(\frac{2}{3}\right)^{i}\left(\frac{1}{3}\right)^{2-i}.$$

On obtient

i	0	1	2
$P(N=i)$	1/9	4/9	4/9

(b) On a $X(\Omega) = N(\Omega) = \{0,1,2\}$.
On note P_i : "Obtenir *Pile* au i-ième lancer de la seconde série de lancers" et F_i : "Obtenir *Face* au i-ième lancer de la seconde série de lancers". Les lancers étant indépendants, on a

$$\begin{aligned}
P([N=0]\cap[X=0]) = P(N=0)P_{[N=0]}(X=0) &= \frac{1}{9}\times 1 = \frac{1}{9}\\
P([N=1]\cap[X=0]) = P(N=1)P_{[N=1]}(X=0) &= \frac{4}{9}\times P(F_1) = \frac{4}{9}\times\frac{2}{3} = \frac{8}{27}\\
P([N=1]\cap[X=1]) = P(N=1)P_{[N=1]}(X=1) &= \frac{4}{9}\times P(P_1) = \frac{4}{9}\times\frac{1}{3} = \frac{4}{27}\\
P([N=2]\cap[X=0]) = P(N=2)P_{[N=2]}(X=0) &= \frac{4}{9}\times P(F_1\cap F_2)\\
&= \frac{4}{9}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{16}{81}\\
P([N=2]\cap[X=1]) = P(N=2)P_{[N=2]}(X=1) &= \frac{4}{9}\times P((F_1\cap P_2)\cup(P_1\cap F_2))\\
&= \frac{4}{9}\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}\\
P([N=2]\cap[X=2]) = P(N=2)P_{[N=2]}(X=2) &= \frac{4}{9}\times P(P_1\cap P_2) = \frac{4}{9}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{4}{81}
\end{aligned}$$

Enfin on ne peut pas obtenir plus de Piles que l'on ne fait de lancers, donc :

$$P([N=0]\cap[X=1]) = P([N=0]\cap[X=2]) = P([N=1]\cap[X=2]) = 0.$$

On en déduit la loi conjointe de N et de X ainsi que la loi marginale de X

$X \backslash N$	0	1	2	Loi de X
0	1/9	8/27	16/81	49/81
1	0	4/27	16/81	28/81
2	0	0	4/81	4/81
Loi de N	1/9	4/9	4/9	1

(c) Comme $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(2, \dfrac{2}{3}\right)$ on a directement

$$E(N) = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

Puis

$$E(X) = \sum_{k=0}^{2} kP(X=k) = \frac{28}{81} + 2 \times \frac{4}{81} = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}
E(NX) &= \sum_{i=0}^{2}\sum_{k=0}^{2} ikP([N=i]\cap[X=k]) \\
&= P([N=1]\cap[X=1]) + 2P([N=1]\cap[X=2]) + 2P([N=2]\cap[X=1]) + 4P([N=2]\cap[X=2]) \\
&= \frac{4}{27} + 0 + \frac{32}{81} + \frac{16}{81} \\
&= \frac{60}{81} \\
&= \frac{20}{27}
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\mathrm{Cov}(N,X) = E(NX) - E(N)E(X) = \frac{20}{27} - \frac{4}{3} \times \frac{4}{9} \qquad \text{c'est-à-dire : } \boxed{\mathrm{Cov}(X,N) = \frac{4}{27}}.$$

Comme attendu, on a $\mathrm{Cov}(X,N) > 0$ (l'argumentation est la même qu'en I.5).

(3) Soit $i \in [\![0,n]\!]$.

Comme en I.1, sachant $[N=i]$, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(i, \dfrac{1}{3}\right)$.

(4) On suppose que $0 \leqslant k \leqslant i \leqslant n$. D'un côté

$$\binom{i}{k}\binom{n}{i} = \frac{i!}{k!\,(i-k)!}\,\frac{n!}{i!\,(n-i)!} = \frac{n!}{k!\,(i-k)!\,(n-i)!}.$$

De l'autre côté

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\,\frac{(n-k)!}{(i-k)!\,((n-k)-(i-k))!} = \frac{n!}{k!\,(i-k)!\,(n-i)!}.$$

On a donc bien

$$\binom{i}{k}\binom{n}{i} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{i-k}.$$

(5) On procède comme en I.2.

Le nombre N de lancers effectués lors de la seconde série de lancers est compris entre 0 et n (puisque $N(\Omega) = [\![0,n]\!]$), le nombre de *Pile* obtenus lors de la seconde série de lancers est donc aussi compris entre 0 et n.

Donc

$$X(\Omega) = [\![0,n]\!].$$

Fixons $k \in [\![0, n]\!]$.. D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{[N = i] : i \in [\![0, n]\!]\}$, on a

$$P(X = k) = \sum_{i=0}^{n} P_{[N=i]}(X = k)P(N = i).$$

Or si $i < k$, alors il est impossible d'obtenir k fois *Pile* lors de i lancers. Donc si $i < k$, alors $P_{[N=i]}(X = k) = 0$. Il ne reste donc que les indices $i \geq k$.

$$P(X = k) = \sum_{i=k}^{n} P_{[N=i]}(X = k)P(N = i).$$

Comme $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{2}{3}\right)$ et comme, sachant $[N = i]$, $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(i, \frac{1}{3}\right)$, on a

$$\begin{aligned}
P(X = k) &= \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{i-k} \binom{n}{i} \left(\frac{2}{3}\right)^{i} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-i} \\
&= \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-i+k} \left(\frac{2}{3}\right)^{2i-k} \\
&\underset{\text{II.4.}}{=} \binom{n}{k} \sum_{i=k}^{n} \binom{n-k}{i-k} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-i+k} \left(\frac{2}{3}\right)^{2i-k} \\
&\underset{j=i-k}{=} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-j} \left(\frac{2}{3}\right)^{2j+k} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} \left(\frac{4}{9}\right)^{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-j} \\
&= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{k} \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{3}\right)^{n-k}
\end{aligned}$$

d'après la formule du binôme. En simplifiant, il vient, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{2}{9}\right)^{k} \left(\frac{7}{9}\right)^{n-k}.$$

On en déduit que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{2}{9}\right)$.

(6) Ici il n'y a pas de 0 dans la loi conjointe de X et de Y, il faut donc un petit peu calculer pour trouver un contre-exemple. On a

$$P(X = 0) = \binom{n}{0} \left(\frac{2}{9}\right)^{0} \left(\frac{7}{9}\right)^{n-0} = \left(\frac{7}{9}\right)^{n} \qquad \text{et} \qquad P(Y = 0) = \binom{n}{0} \left(\frac{4}{9}\right)^{0} \left(\frac{5}{9}\right)^{n-0} = \left(\frac{5}{9}\right)^{n}.$$

Par ailleurs on a simultanément $X = 0$ et $Y = 0$ si et seulement si $N = 0$ (si l'on effectue un lancer ou plus lors de la seconde série de lancers, alors on obtient au moins un *Pile* ou au moins 1 *Face*). Ainsi,

$$P([X = 0] \cap [Y = 0]) = P(N = 0) = \binom{n}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^{0} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-0} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n}.$$

On a donc

$$P([X=0]\cap[Y=0]) = \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{27}{81}\right)^n \neq \left(\frac{35}{81}\right)^n = P(X=0)P(Y=0).$$

On en déduit que X et Y ne sont pas indépendantes.

(7) On a toujours $X+Y=N$.
D'un côté, on a : $V(X+Y)=V(N)$, et de l'autre côté $V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$. On a donc

$$V(N)=V(X)+V(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y).$$

Comme $N \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n,\dfrac{2}{3}\right)$, comme $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n,\dfrac{2}{9}\right)$ et comme $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n,\dfrac{4}{9}\right)$, il vient :

$$n\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3} = n\times\frac{2}{9}\times\frac{7}{9} + n\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{9} + 2\mathrm{Cov}(X,Y)$$

Donc :

$$2\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{2n}{9} - \frac{14n}{81} - \frac{20n}{81} = -\frac{16n}{81} \qquad \text{c'est-à-dire : } \boxed{\mathrm{Cov}(X,Y) = -\frac{8n}{81}}.$$

$\mathrm{Cov}(X,Y)<0$, ce qui est attendu car X et Y varient en moyenne dans des sens opposés : plus l'on a obtenu de *Pile* lors de la seconde série de lancers, moins l'on a obtenu de *Face*.

Partie III

(1) (a) Le tableau `simulX` contient 100 000 simulations de la variable aléatoire X dans le contexte de la partie I.
Le tableau `simulY` contient 100 000 simulations de la variable aléatoire Y dans le contexte de la partie I.

(b) Soit $k \in [\![1;n]\!]$.
L'instruction `sum(simulX==k)` calcule le nombre de coefficients du tableau `simulX` qui sont égaux à k.
L'instruction `sum(simulX==k)/tot` où `tot=100000` calcule donc la proportion des cas où X a pris la valeur k lors des 100 000 simulations.
L'instruction `sum(simulX==k)/tot` où `tot=100000` calcule donc une valeur approchée de $P(X=k)$ par la méthode de Monte-Carlo.
Ainsi

$$\texttt{loiX} \approx \begin{bmatrix} P(X=1) & P(X=2) & P(X=3) & P(X=4) & P(X=5) \end{bmatrix}$$

De même,

$$\texttt{loiY} \approx \begin{bmatrix} P(Y=1) & P(Y=2) & P(Y=3) & P(Y=4) & P(Y=5) \end{bmatrix}$$

L'entier n donne le nombre de valeurs que l'on cherche à approcher dans la loi de X.
Le tableau `loiX` ne donne pas la loi complète de X (il manque le terme $P(X=0)$ ainsi que les termes $P(X=6)$, $P(X=7)$, $P(X=8)$, ...) donc si l'on additionne les éléments du tableau `loiX` avec l'instruction `sum(loiX)` il est normal de ne pas trouver un nombre proche de 1.

(c) Comme le fait `SciLab`, on confond ici le booléen `T` (true) avec l'entier 1 et le booléen `F` (false) avec l'entier 0. Soit $i,j \in [\![1;n]\!]$.
L'instruction `(simulX==i)` construit un tableau de même taille que `simulX` contenant des 0 et des 1 : 1 pour une simulation de X amenant la valeur i, 0 pour une simulation de X amenant une valeur autre que i.

L'instruction `(simulY==j)` construit un tableau de même taille que `simulY` contenant des 0 et des 1 : 1 pour une simulation de Y amenant la valeur j, et 0 pour une simulation de Y amenant une valeur autre que j.
En multipliant ces deux tableaux entre-eux coefficient par coefficient, on obtient à nouveau un tableau de 0 et de 1 : 1 si les deux cases contenaient déjà un 1, c'est-à-dire pour une simulation de X amenant la valeur i ET une simulation de Y amenant la valeur j, et 0 sinon.

Par exemple :

Si `simulX` donne : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 & 2 & 1 & \dots \end{bmatrix}$

alors `(simulX==1)` donne : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \end{bmatrix}$

Si `simulY` donne : $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 4 & 2 & \dots \end{bmatrix}$

alors `(simulY==2)` donne : $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \dots \end{bmatrix}$

Enfin `(simulX==1).*(simulY==2)` donne : $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \end{bmatrix}$

On vérifie bien que les 3-ième, 7-ième et 10-ième simulations de X et Y amènent respectivement 1 et 2.

L'instruction `sum((simulX==i).*(simulY==j))` calcule donc le nombre de simulations amenant simultanément $X = i$ et $Y = j$.
L'instruction `sum((simulX==i).*(simulY==j))/tot` où `tot=100000` calcule donc la proportion des cas amenant simultanément $X = i$ et $Y = j$ lors des 100 000 simulations.
L'instruction `sum((simulX==i).*(simulY==j))/tot` où `tot=100000` calcule donc une valeur approchée de $P([X = i] \cap [Y = j])$, qui sera stockée dans la case en position (i, j) du tableau `loiXY`. Ainsi,

$$\texttt{loiXY} \approx \begin{bmatrix} P([X=1]\cap[Y=1]) & P([X=1]\cap[Y=2]) & \dots & \dots & P([X=1]\cap[Y=5]) \\ P([X=2]\cap[Y=1]) & P([X=2]\cap[Y=2]) & \dots & \dots & P([X=2]\cap[Y=5]) \\ P([X=3]\cap[Y=1]) & P([X=3]\cap[Y=2]) & \dots & \dots & P([X=3]\cap[Y=5]) \\ P([X=4]\cap[Y=1]) & P([X=4]\cap[Y=2]) & \dots & \dots & P([X=4]\cap[Y=5]) \\ P([X=5]\cap[Y=1]) & P([X=5]\cap[Y=2]) & \dots & \dots & P([X=5]\cap[Y=5]) \end{bmatrix}$$

(d) On rappelle qu'en `SciLab`, si `A` est une matrice, alors `A'` donne la transposée de `A`.
On a alors

$$\texttt{loiX'*loiY} \approx \begin{bmatrix} P(X=1) \\ P(X=2) \\ P(X=3) \\ P(X=4) \\ P(X=5) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} P(Y=1) & P(Y=2) & P(Y=3) & P(Y=4) & P(Y=5) \end{bmatrix}$$

Donc

$$\texttt{loiX'*loiY} \approx \begin{bmatrix} P(X=1)\times P(Y=1) & P(X=1)\times P(Y=2) & \dots & \dots & P(X=1)\times P(Y=5) \\ P(X=2)\times P(Y=1) & \dots & \dots & \dots & P(X=2)\times P(Y=5) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ P(X=5)\times P(Y=1) & P(X=5)\times P(Y=2) & \dots & \dots & P(X=5)\times P(Y=5) \end{bmatrix}$$

L'instruction `disp(loiXY-loiX'*loiY)` permet donc d'afficher l'écart entre les $P([X = i] \cap [Y = j])$ et les $P(X = i) \times P(Y = j)$ pour tous les $i, j \in [\![1; 5]\!]$.

(2) Le code donné dans cette question reprend exactement ce qui a été décrit dans la question précédente, mais dans le contexte de la Partie II.

Or on a vu que dans la partie I les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors que dans la partie II elles ne le sont pas.

L'affichage obtenu avec `disp(loiXY-loiX'*loiY)` correspondant au code de la question 1. (et donc au contexte de la partie I) est donc le premier affichage, puisque les valeurs des $P([X = i] \cap [Y = j]) - P(X = i)P(Y = j)$ sont globalement toutes proches de 0.

Le second affichage correspond donc au code de la Question 2. (c'est-à-dire au contexte de la partie II).

(3) On travaille ici dans le contexte de la Partie II avec $n = 5$: ici on a $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0;5]\!]$.

On a :

$$\texttt{I.*loiX} \approx \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \bullet\!\times \begin{bmatrix} P(X=1) & P(X=2) & P(X=3) & P(X=4) & P(X=5) \end{bmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\texttt{I.*loiX} \approx \begin{bmatrix} 1\,P(X=1) & 2\,P(X=2) & 3\,P(X=3) & 4\,P(X=4) & 5\,P(X=5) \end{bmatrix}$$

L'instruction `sum(I.*loiX)` donne donc une valeur approchée de

$$E(X) = \sum_{k=0}^{5} k\,P(X=k).$$

De même l'instruction `sum(J.*loiY)` donne donc une valeur approchée de $E(Y)$.

Enfin, on a : $$\texttt{I'*J} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 1 & 1\times 2 & \dots & \dots & 1\times 5 \\ 2\times 1 & \dots & \dots & \dots & 2\times 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5\times 1 & 5\times 2 & \dots & \dots & 5\times 5 \end{bmatrix}$$

L'instruction `sum(IJ.*loiXY)` donne donc approximativement

$$\sum_{i=0}^{5}\sum_{j=0}^{5} i\,j\,P([X=i]\cap[Y=j]).$$

Autrement dit l'instruction `sum(IJ.*loiXY)` donne une valeur approchée de $E(XY)$.

On sait alors que l'instruction `sum(IJ.*loiXY)-sum(I.*loiX)*sum(J.*loiY)` donne une valeur approchée de la covariance de X et de Y.

Plusieurs simulations donnent les valeurs approchées suivantes pour la covariance de X et de Y :

```
- 0.4974063        - 0.4900090        - 0.4934855        - 0.4955416
```

Ceci peut être comparé à la covariance théorique trouvée en II.7, que l'on peut calculer dans la console `SciLab` :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = -\frac{8n}{81} = -\frac{40}{81} \approx -0{,}4938272\dots$$