ECE 1 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison

À rendre le 06/02

Exercice 1

Déterminer la nature de la branche en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{e^{3x}+x-1}\right).$$

Exercice 2

Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$.
On considère la matrice M et N définies par

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer des réels x et y tels que $M = xN + yI$ où I est la matrice unité d'ordre 4.

(2) Compléter la fonction `SciLab` ci-dessous permettant de renvoyer la matrice M.

```
function M=matriceDM(a,b)
    M=...........*ones(4, 4) - (.........)*eye(4,4)
endfunction
```

(3) (a) Calculer N^2.
(b) Démontrer que pour tout entier $k \geq 1$, il existe un réel u_k tel que $N^k = u_k N$.
(c) Déterminer u_k puis N^k en fonction de k. Cette formule est-elle valable pour $k = 0$?

(4) En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de M^n en fonction de I, de N et de n. On montrera que

$$M^n = (a-b)^n I + \frac{(a+3b)^n - (a-b)^n}{4b} N.$$

Exercice 3

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $2/3$.
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $1/2$.
- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $1/2$.
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $1/3$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : le joueur gagne la $n^{\text{ième}}$ partie.
De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \qquad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \qquad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \qquad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}.$$

(1) On admet que (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements.

(a) Utiliser la formule des probabilités totales pour montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$P\left(E_{n+1}\right) = \frac{2}{3} P\left(E_n\right) + \frac{1}{2} P\left(F_n\right).$$

(b) Exprimer de la même façon les probabilités $P\left(F_{n+1}\right)$, $P\left(G_{n+1}\right)$ et $P\left(H_{n+1}\right)$ en fonction de $P\left(E_n\right)$, $P\left(F_n\right)$, $P\left(G_n\right)$ et $P\left(H_n\right)$.

(c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} P\left(E_n\right) \\ P\left(F_n\right) \\ P\left(G_n\right) \\ P\left(H_n\right) \end{pmatrix}$.

Vérifier que $U_{n+1} = MU_n$, où $M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}$.

(2) On introduit les matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Calculer PQ. En déduire que P est inversible et donner son inverse.
(b) Justifier que $D = P^{-1}MP$ est une matrice diagonale que l'on explicitera.

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

(3) (a) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = PD^nP^{-1}$.
(b) Montrer, également par récurrence, que : $\forall n \geqslant 2, \quad U_n = M^{n-2}U_2$.
(c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, déduire des questions précédentes les expressions de $P\left(E_n\right)$, $P\left(F_n\right)$, $P\left(G_n\right)$ et $P\left(H_n\right)$ en fonction de n.
(d) Montrer que l'on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(E_n\right) = \frac{3}{10} \qquad \lim_{n \to +\infty} P\left(F_n\right) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n \to +\infty} P\left(G_n\right) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n \to +\infty} P\left(H_n\right) = \frac{3}{10}$$