Devoir Maison

Solution

Exercice 1

Commençons par voir que

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\ln\left(\left(e^{3x}+x-1\right)^{1/2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\ln\left(e^{3x}+x-1\right) \\ &= \frac{1}{4}\ln\left(e^{3x}\left(1+xe^{-3x}-e^{-3x}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(3x+\ln\left(1+xe^{-3x}-e^{-3x}\right)\right) \\ &\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \end{aligned}$$

car $xe^{-3x} \longrightarrow 0$ (lorsque $x \to \infty$) par croissance comparée.

Il suit que

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{3x+\ln\left(1+xe^{-3x}-e^{-3x}\right)}{4x} \\ &= \frac{3}{4}+\frac{\ln\left(1+xe^{-3x}-e^{-3x}\right)}{4x} \\ &\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

pour les mêmes raisons. Mais alors,

$$\begin{aligned} f(x)-\frac{3}{4}x &= \frac{\ln\left(1+xe^{-3x}-e^{-3x}\right)}{4} \\ &\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Donc la courbe de f admet une asymptote oblique, en $+\infty$, d'équation

$$y = \frac{3}{4}x.$$

Exercice 2

Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$.
On considère la matrice M et N définies par

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix}.$$

(1) $M = xN + yI$ donne clairement $bx + y = a$ et $bx = b$ donc $x = 1$ et $y = a - b$.

(2) La question précédente permet de compléter la fonction `SciLab` ci-dessous permettant de renvoyer la matrice M *fingers in the nose.*

```
function M=matriceDM(a,b)
    M=b*ones(4, 4) - (b-a)*eye(4,4)
endfunction
```

(3) (a) On constate que

$$N^2 = \begin{pmatrix} 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 \\ 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 \\ 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 \\ 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 & 4b^2 \end{pmatrix} = 4bN.$$

(b) On procède par récurrence.

- initialisation: pour $n = 1$, il suffit naturellement de prendre $u_1 = 1$.

- hérédité: supposons qu'il existe un réel u_k tel que, $N^k = u_k N$, pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$N^{k+1} = N^k \cdot N = u_k N \cdot N = u_k N^2 = u_k \times 4bN.$$

En prenant $u_{k+1} = 4bu_k$, on a bien le résultat souhaité.

(c) La suite (u_k) ainsi construite est géométrique, de raison $4b$ et de premier terme $u_1 = 1$, on en déduit que

$$u_k = (4b)^{k-1} u_1 = (4b)^{k-1}$$

ce qui permet d'affirmer que

$$N^k = (4b)^{k-1} N = \begin{pmatrix} 4^{k-1}b^k & 4^{k-1}b^k & 4^{k-1}b^k & 4^{k-1}b^k \\ 4^{k-1}b^k & 4^{k-1}b^k & 4^{k-1}b^k & 4^{k-1}b^k \\ 4^{k-1}b^k & 4^{k-1}b^k & 4^{k-1}b^k & 4^{k-1}b^k \\ 4^{k-1}b^k & 4^{k-1}b^k & 4^{k-1}b^k & 4^{k-1}b^k \end{pmatrix}.$$

Pour $k = 0$, $N^k = I$ et la formule n'est pas valide.

(4) On a $M^n = (N + (a-b)I)^n$. Or, les matrices N et $(a-b)I$ commutent car tout multiple de l'identité commute avec toute matrice. On peut donc appliquer la formule du binôme, qui donne

$$\begin{aligned} M^n &= (N + (a-b)I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k ((a-b)I)^{n-k} \\ &= (a-b)^n I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} N^k \\ &= (a-b)^n I + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (4b)^{k-1} \right) N \\ &= (a-b)^n I + \frac{1}{4b} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a-b)^{n-k} (4b)^{k} - (a-b)^n \right) N \\ &= (a-b)^n I + \frac{1}{4b} \left((a+3b)^n - (a-b)^n \right) N \end{aligned}$$

ce qui est bien la formule attendue.

Exercice 3

Un joueur participe à un jeu se jouant en plusieurs parties. Ses observations lui permettent d'affirmer que :

- s'il gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $2/3$.
- s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $1/2$.
- s'il gagne une partie et perd la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $1/2$.
- s'il perd deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $1/3$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : le joueur gagne la $n^{\text{ième}}$ partie.
De plus, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :

$$E_n = A_{n-1} \cap A_n \qquad F_n = \overline{A_{n-1}} \cap A_n \qquad G_n = A_{n-1} \cap \overline{A_n} \qquad H_n = \overline{A_{n-1}} \cap \overline{A_n}.$$

(1) On admet que (E_n, F_n, G_n, H_n) est un système complet d'événements.

(a) Soit $n \geq 2$. D'après la formule des probabilités totales appliquée au s.c.e (E_n, F_n, G_n, H_n), on a

$$P(E_{n+1}) = P_{E_n}(E_{n+1})P(E_n) + P_{F_n}(E_{n+1})P(F_n) + P_{G_n}(E_{n+1})P(G_n) + P_{H_n}(E_{n+1})P(H_n)$$

Or, $E_{n+1} = A_n \cap A_{n+1}$ donc $P_{G_n}(E_{n+1}) = 0$ et $P_{H_n}(E_{n+1}) = 0$. Par ailleurs, d'après les données du texte, si le joueur gagne deux parties consécutives, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $2/3$ ce qui veut dire que $P_{E_n}(E_{n+1}) = 2/3$ et s'il perd une partie et gagne la suivante, alors il gagne la prochaine avec la probabilité $1/2$ ce qui donne $P_{F_n}(E_{n+1}) = 1/2$. Au final,

$$\begin{aligned} P(E_{n+1}) &= P_{E_n}(E_{n+1})P(E_n) + P_{F_n}(E_{n+1})P(F_n) + P_{G_n}(E_{n+1})P(G_n) + P_{H_n}(E_{n+1})P(H_n) \\ &= \frac{2}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n). \end{aligned}$$

(b) Le même raisonnement (formule des probabilités totales et interprétation des données du texte sur le déroulement de parties consécutives) permet d'obtenir les relations de récurrence

$$\begin{aligned} P(F_{n+1}) &= P_{E_n}(F_{n+1})P(E_n) + P_{F_n}(F_{n+1})P(F_n) + P_{G_n}(F_{n+1})P(G_n) + P_{H_n}(F_{n+1})P(H_n) \\ &= \frac{1}{2}P(G_n) + \frac{1}{3}P(H_n), \end{aligned}$$

$$P(G_{n+1}) = \frac{1}{3}P(E_n) + \frac{1}{2}P(F_n)$$

et

$$P(H_{n+1}) = \frac{1}{2}P(G_n) + \frac{2}{3}P(H_n).$$

(c) Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose : $U_n = \begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix}$.

Il est clair, d'après les deux questions précédentes que $U_{n+1} = MU_n$, où

$$M = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

(2) On introduit les matrices

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) On constate que

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix},$$

ce qui permet d'affirmer que P est inversible et que $P^{-1} = \frac{1}{10}Q$.

(b) On fait le calcul explicite

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{10}QMP \\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1/3 & 1 & -1 & -1/3 \\ 1/3 & -1/2 & -1/2 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -10/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et la matrice D est bien diagonale.

Dans toute la suite, on suppose que le joueur a gagné les deux premières parties.

(3) (a) Petite récurrence classique qu'on a déjà faite 274 fois.

- initialisation: pour $n = 0$, on a bien $M^n = I = PIP^{-1} = I$.

- hérédité: supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $M^n = PD^nP^{-1}$. Mais alors

$$M^{n+1} = M^n \cdot M = PD^nP^{-1}PDP^{-1} = PD^n \cdot DP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1},$$

ce qui est bien ce qu'on attendait.

(b) On sait que, pour tout $n \geq 2$, on a $U_{n+1} = MU_n$. Utilisons ceci dans la récurrence

- initialisation: pour $n = 2$, on a bien $U_2 = M^0U_2$ car $M^0 = I$.

- hérédité: supposons que, pour un certain entier $n \geq 2$, on ait $U_n = M^{n-2}U_2$. Alors,

$$U_{n+1} = MU_n = M \cdot M^{n-2}U_2 = M^{n-1}U_2,$$

ce qui est bien la propriété au rang $n+1$ et termine la récurrence.

(c) Comme le joueur gagne les deux premières parties, il est clair que

$$U_2 = \begin{pmatrix} P(E_2) \\ P(F_2) \\ P(G_2) \\ P(H_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, on a vu, dans les questions précédentes, que

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} P(E_n) \\ P(F_n) \\ P(G_n) \\ P(H_n) \end{pmatrix} &= U_n = M^{n-2}U_2 \\
&= PD^{n-2}P^{-1}U_2 \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1/3)^{n-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/6)^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1/2)^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1/3)^{n-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1/6)^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (1/2)^{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -(-1/3)^{n-2} \\ 2(1/6)^{n-2} \\ (1/2)^{n-1} \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Il suit que

$$\begin{aligned} P(E_n) &= \frac{2(1/6)^{n-2} - (-1/3)^{n-2} + 3(1/2)^{n-1} + 3}{10} \\ P(F_n) &= \frac{-1(1/6)^{n-2} - 2(-1/3)^{n-2} - (1/2)^{n-1} + 2}{10} \\ P(G_n) &= \frac{-1(1/6)^{n-2} + 2(-1/3)^{n-2} + (1/2)^{n-1} + 2}{10} \\ P(H_n) &= \frac{(1/6)^{n-2} - (-1/3)^{n-2} - 3(1/2)^{n-1} + 3}{10} \end{aligned}$$

(d) On déduit de la question précédente, sachant que $(1/6)^{n-2}$, $(-1/3)^{n-2}$ et $(1/2)^{n-1}$ sont des quantités qui tendent vers 0 que

$$\lim_{n\to+\infty} P(E_n) = \frac{3}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(F_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(G_n) = \frac{2}{10} \qquad \lim_{n\to+\infty} P(H_n) = \frac{3}{10}.$$