ECE 1 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Maison

À rendre le 06/03

Exercice 1

On s'intéresse à la suite d'équations, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$(E_n) \qquad e^x + x = n.$$

(1) On pose $f(x) = e^x + x$. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un ensemble à déterminer.
(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) admet une unique solution positive que l'on notera (u_n). Que vaut u_1?
(3) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\ln(x) < x$. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{\ln(n)}{2} \leq u_n \leq n \qquad (\star)$$

(4) Que peut-on en déduire quant à la limite de (u_n)?
(5) Compléter le programme `SciLab` suivant afin qui représente simultanément une approximation (à 10^{-4} près) des n premiers termes de la suite (u_n) et ceux de l'encadrement $(\star)$.

```
n=input('n=?')
u=zeros(1,n)
for k=2:n
    a=1;
    b=n;
    c=(a+b)/2;
    while b-a>=10^{-4} & exp(c)+c<>k
        if (exp(a)+a-k)*(...........)<=0 then
            b=..........
        else
            a=..........
        end
        c=..............
    end
    u(k)=.............
end

plot2d(.........., ..........., -4) // représentation des termes de (u_n) ,  -4
 représente des losanges
plot2d([1:n], [1:n], -1) //
Z=1/2*log(1:n);
plot2d([1:n], Z, -3)
```

Exercice 2

Montrer que la fonction f définie par la formule ci-dessous est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{x\ln(x)}, & \text{si } x \in]0;1[\cup]1;+\infty[\\ \\ -1, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Est-elle prolongeable par continuité en 0?

Exercice 3

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

(1) (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, notée u_n.
(b) Calculer u_1 et u_2.
(c) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \in]0, \dfrac{2}{3}[$.

(2) (a) Montrer que, pour tout x élément de $]0,1[$, on a $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
(b) En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite (u_n).
(c) Montrer que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

(3) (a) Déterminer, à l'aide du théorème des gendarmes, la limite de (u_n^n) lorsque n tend vers $+\infty$.
(b) Donner enfin la valeur de ℓ.

Exercice 4 - Le paradoxe des anniversaires

L'objectif de cet exercice est de visualiser l'évolution de la probabilité qu'au moins deux personnes d'un groupe fêtent leur anniversaire le même jour, en fonction du nombre d'individus dans le groupe.

Partie 1 - Préliminaires probabilistes

On suppose, pour simplifier, qu'une année n'est constituée que de 365 jours et que les naissances sont réparties uniformément tout au long de l'année.

On considère alors un groupe de n individus et on appelle Ω l'ensemble des listes ordonnées constituées des n dates d'anniversaire des membres de ce groupe (on ne s'intéresse pas à l'année de naissance mais seulement au jour et au mois). L'hypothèse précédente nous mène à considérer une probabilité uniforme P sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

(1) Quel est le cardinal de Ω?
(2) On s'intéresse à l'évènement A: "au moins deux personnes du groupe fêtent leur anniversaire le même jour". Quel est l'évènement contraire de A?
(3) Calculer, en fonction de n, la probabilité de $\overline{A}$. En déduire celle de A, notée p_n.

Partie 2 - Utilisation de `SciLab`

(1) À l'aide des résultats de la partie précédente, écrire une fonction `p=anniversaire(n)` qui prend en argument un nombre entier naturel `n` et renvoie la valeur de la probabilité p_n.
(2) Écrire un programme permettant de déterminer le nombre minimum de personnes nécessaires pour que la probabilité p_n soit supérieure à 50%. Même question avec 99%.
(3) Représenter graphiquement l'évolution de la suite (p_n) pour n entre 1 et 60.