ECE 1 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir Maison

À rendre le 24/01

Exercice 1

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles de premiers termes u_0 et v_0 vérifiant les relations

$$\forall n \geq 0, \qquad u_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

(1) En recherchant des combinaisons linéaires intéressantes de (u_n) et (v_n), déterminer u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.

(2) En déduire

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

Exercice 2

Soit f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(1+x)$. On considère alors la suite (u_n) définie son premier terme u_0 et, pour $n \geq 0$, par $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) (a) Pour $x \geq 0$, calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
   (b) En déduire le sens de variations de f sur $[0;+\infty[$.

(2) Déterminer le signe de $f(x) - x$ selon la valeur de x.

(3) Tracer la courbe représentative de f.

(4) On suppose dans cette question que $u_0 \in \,]e-1;+\infty[$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq u_{n+1}$.
   (b) La suite (u_n) est-elle bornée? Déterminer sa limite.

(5) On suppose dans cette question que $u_0 \in \,]0;e-1[$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, $0 < u_n < e-1$.
   (b) En déduire que (u_n) est décroissante puis convergente. Que vaut alors sa limite?

(6) (`SciLab`). On suppose dans cette question que $u_0 = 3/2$. Écrire un programme `SciLab` permettant de calculer et d'afficher un entier n tel que $u_n < 10^{-3}$.

Exercice 3

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

(1) Montrer que

$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)'.$$

(2) En déduire une autre expression pour $f(x)$.

(3) À l'aide de la question précédente, calculer $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}}$ puis en déduire la limite de (α_n).

(4) Calculer

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{2^k}}.$$

(5) Que vaut la limite de (u_n)?

Exercice 4

Déterminer pour quelles valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ a-t-on

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$