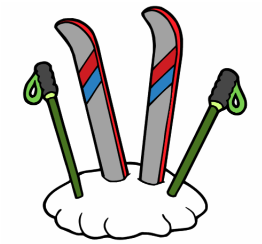


Devoir Maison

Solution

Exercice 1

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par leurs premiers termes u_0 et v_0 et les relations de récurrence:

$$\forall n \geq 0, \qquad u_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

(1) La première combinaison linéaire à laquelle on pense est tout simplement la somme des deux suites. On constate d'ailleurs immédiatement que

$$u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} + \frac{u_n + 3v_n}{4} = \frac{4(u_n + v_n)}{4} = u_n + v_n.$$

Ainsi, la suite $(u_n + v_n)$ est constante, égale pour tout $n \geq 0$ à son premier terme $u_0 + v_0$. Après avoir regardé la somme des deux suites, on pense à regarder la différence. On voit que

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} - \frac{u_n + 3v_n}{4} = \frac{2u_n - 2v_n}{4} = \frac{1}{2}(u_n - v_n),$$

ce qui prouve que la suite $(u_n - v_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. On peut donc écrire, pour $n \geq 0$,

$$u_n - v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - v_0).$$

Ces deux informations vont nous permettre d'exprimer le terme général de chacune des deux suites. En effet,

$$u_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n + u_n - v_n) = \frac{1}{2}\left(u_0 + v_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - v_0)\right)$$

et

$$v_n = \frac{1}{2}(u_n + v_n - (u_n - v_n)) = \frac{1}{2}\left(u_0 + v_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^n (u_0 - v_0)\right).$$

(2) D'après le cours sur les limites des suites de référence (et en particulier celle des suites géométriques), on sait que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Par opérations sur les limites, il est alors immédiat que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n = u_0 + v_0.$$

Exercice 2

Soit f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = x\ln(1+x)$. La suite (u_n) définie son premier terme u_0 et, pour $n \geq 0$, par $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) (a) La fonction f est bien définie est dérivable (comme produit de fonctions usuelles) sur $[0;+\infty[$. On a de plus, pour $x \geq 0$,

$$f'(x) = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

La fonction dérivée f' est encore dérivable sur $[0;+\infty[$ et le calcule donne, toujours pour $x \geq 0$,

$$f''(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{2+x}{(1+x)^2}.$$

(b) Il est alors facile de déterminer le signe de $f''(x)$ puis d'en déduire successivement le sens de variations de f', le signe de $f'(x)$ et le sens de f. On regroupe ces informations dans le tableau suivant:

x	0		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	
f'	0	$\nearrow$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

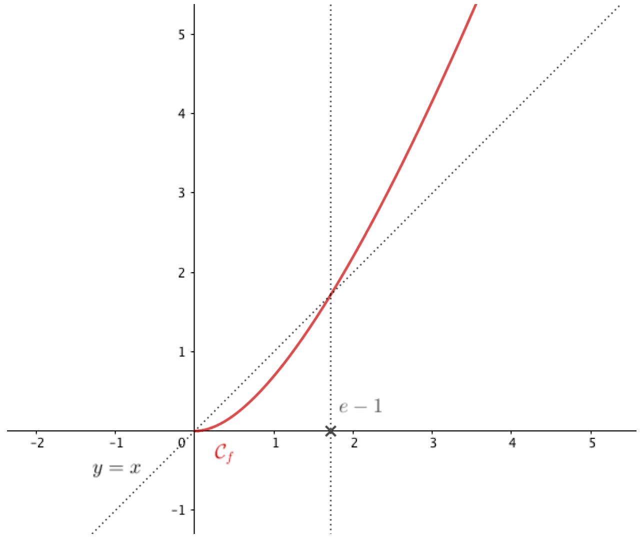
(2) On résout:

$$\begin{aligned} f(x) - x \geq 0 &\iff x\ln(x+1) - x \geq 0 \\ &\iff x\left(\ln(x+1) - 1\right) \geq 0 \\ &\iff \ln(x+1) \geq 1 \quad \text{ou} \quad x = 0 \\ &\iff x+1 \geq e \quad \text{ou} \quad x = 0 \\ &\iff x \geq e-1 \quad \text{ou} \quad x = 0. \end{aligned}$$

Le tableau de signes suit:

x	0		$e-1$		$+\infty$
$f(x)-x$	0	$-$	0	$+$	

(3) Afin de connaître un peu mieux l'allure de f, on peut regarder la *branche infinie*. Il est immédiat de voir que $\frac{f(x)}{x} \to +\infty$, et donc la courbe de f admet *une branche parabolique* de direction l'axe des ordonnées. On peut faire également apparaître la droite d'équation $y = x$ dont on connait la position par rapport à la courbe de f grâce au tableau de signes ci-dessus. De plus, comme $f'(0) = 0$, on sait que la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0 est horizontale. Au final, l'allure de la courbe est la suivante:



(4) On suppose dans cette question que $u_0 \in]e-1;+\infty[$.

(a) On commence par montrer, par récurrence, que si $u_0 > e-1$, alors, pour tout $n \geq 0$, $u_n > e-1$. En effet, s'il existe $n \geq 0$ tel que $u_n > e-1$, alors $f(u_n) \geq u_n$ d'après la Question (2), c'est à dire $u_{n+1} \geq u_n > e-1$. En particulier, $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite (u_n) est croissante.

(b) Si (u_n) était bornée, alors (u_n) serait convergente (de limite l) avec

$$e-1 < u_0 \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq l$$

mais les seules valeurs possibles pour la limite de (u_n) sont les points fixes de f, c'est à dire 0 et $e-1$. Aucune de ces valeurs n'est alors compatible avec la croissance de la suite (u_n). Il suit que (u_n) est non bornée et que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

(5) On suppose dans cette question que $u_0 \in]0;e-1[$.

(a) Soit $n \geq 0$ tel que $0 < u_n < e-1$. La fonction f étant strictement croissante sur $[0;+\infty[$, on a d'une part $0 = f(0) < f(u_n) = u_{n+1}$ et d'autre part, $u_{n+1} = f(u_n) < f(e-1) = e-1$. Par récurrence, on a donc l'encadrement souhaité pour tout $n \geq 0$.

(b) D'après la Question (2), $f(x) - x \leq 0$ si $0 < x < e-1$. En prenant $x = u_n$, on voit donc que (u_n) est décroissante. La suite (u_n) est décroissante, et minorée par 0. Par le Théorème de la limite monotone, elle est donc convergente. Sa limite l est alors égale à 0 ou $e-1$, mais comme

$$l \leq u_n \leq \cdots \leq u_0 < e-1,$$

il suit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

(6) (`SciLab`). On suppose dans cette question que $u_0 = 3/2$. Dans ce cas, l'étude précédente nous dit que la suite (u_n) converge vers 0. On écrit sans difficulté le programme suivant

```
u=3/2;
n=0;
while u>=10^{-3}
    u=u*log(1+u);
    n=n+1;
end
disp(n)
```

Exercice 3

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$.

(1) On sait que la dérivée d'une somme est égale à la somme des dérivées. Or, comme la dérivée de x^k est exactement kx^{k-1}, il suit bien que
$$f(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)'.$$

(2) On va alors dériver explicitement la somme précédente, après l'avoir calculée. On sait que
$$\sum_{k=1}^{n} x^k = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}.$$
Il suit que
$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\sum_{k=1}^{n} x^k\right)' = \left(\frac{x - x^{n+1}}{1-x}\right)' \\ &= \frac{(1-(n+1)x^n)(1-x) - (x - x^{n+1})(-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}. \end{aligned}$$

(3) En prenant $x = \frac{1}{2}$ dans la formule précédente, on obtient
$$\alpha_n = 4\left(n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1\right).$$
Par règles de calcul des limites et croissances comparées, on voit que $\alpha_n \to 4, n \to +\infty$.

(4) Les règles sur le symbole Π donnent
$$u_n = \prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{k}{2^k}} = 2^{\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}} = 2^{\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^{k-1}}} = 2^{\frac{\alpha_n}{2}}.$$

(5) Par composition des limites, on en déduit donc que
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 2^{\frac{4}{2}} = 4.$$

Exercice 4

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On résout le système.
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} (1-\lambda)x - 2y + 2z &=& 0 \\ -2x + (1-\lambda)y + 2z &=& 0 \\ -2x - 2y + (5-\lambda)z &=& 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} -2x + (1-\lambda)y + 2z &=& 0 \\ -2x - 2y + (5-\lambda)z &=& 0 \\ (1-\lambda)x - 2y + 2z &=& 0 \end{array}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} -2x + (1-\lambda)y + 2z &=& 0 \\ (\lambda-3)y + (3-\lambda)z &=& 0 \\ ((1-\lambda)^2 - 4)y + 2(3-\lambda)z &=& 0 \end{array}\right.$$

Afin de poursuivre le pivot, on doit distinguer le cas $\lambda = 3$ (qui annule le prochain pivot) et $\lambda \neq 3$.

- Cas où $\lambda = 3$. Le système devient
$$\left\{\begin{array}{rcl} -2x-2y+2z &=& 0 \\ 0 &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array}\right. \iff x=-y+z$$
et dans ce cas, il y a une infinité de solutions
$$\mathcal{S} = \{(-y+z,y,z):\ (y,z)\in\mathbb{R}^3\}.$$
- Cas où $\lambda \neq 3$. Remarquant que $(1-\lambda)^2-4 = (\lambda+1)(\lambda-3)$, et que $\lambda-3\neq 0$ on peut ici simplifier (L_2) et (L_3) en divisant par $(\lambda-3)$. Le système devient alors
$$\left\{\begin{array}{rcl} -2x+(1-\lambda)y+2z &=& 0 \\ y-z &=& 0 \\ (1+\lambda)y-2z &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} -2x+(1-\lambda)y+2z &=& 0 \\ y-z &=& 0 \\ (\lambda-1)z &=& 0 \end{array}\right.$$
Il faut maintenant distinguer le cas $\lambda\neq 1$ de $(1-\lambda)\neq 0$.
  - Si $\lambda = 1$, le système devient
$$\left\{\begin{array}{rcl} -2x+2z &=& 0 \\ y-z &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& z \\ y &=& z \end{array}\right.$$
Il y a donc encore une infinité de solutions et
$$\mathcal{S} = \{(z,z,z):\ z\in\mathbb{R}\}.$$
  - Si $(1-\lambda)\neq 0$ alors nécessairement $z=0$ ce qui donne successivement $y=0$ puis $x=0$. Dans ce cas
$$\mathcal{S} = \{(0,0,0)\}.$$

Au final, pour répondre à la question posée, les valeurs de $\lambda\in\mathbb{R}$ pour lesquelles le système n'admet que la solution $(0,0,0)$ sont toutes les valeurs réelles sauf 1 et 3.