ECE 1 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Devoir Surveillé

Durée: 4 heures

Le sujet comporte quatre exercices indépendants. Toutes les réponses doivent être justifiées et rédigées soigneusement. Tous documents interdits.

Exercice 1 - Questions de cours

Les questions de cet exercice sont indépendantes

(1) Montrer **soigneusement**, par l'absurde, en considérant $H_{2n}-H_n$, que la suite (H_n) est divergente vers $+\infty$, où

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

(2) Déterminer la nature de la branche infinie de la courbe représentative de la fonction

$$f\,:\, x \mapsto \frac{2x^2 - \ln(x) + 1}{1+x}, \qquad x \in \mathbb{R}_+^*.$$

(3) Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $B^2 + B$ et déduire que B n'est pas inversible.

(4) Compléter la fonction `SciLab` ci-dessous afin qu'elle renvoie la matrice $((-1)^{i+j})_{1\leq i,j\leq n}$ où n est l'unique argument de la fonction

```
function M=matrice(n)
    M=zeros(1,............)
    for i=................
        for j=..................
           .....................
        end
    end
endfunction
```

(5) L'application

$$\begin{array}{rccc} f\,: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & (2x+1)^2(y-3) \end{array}$$

est-elle injective? surjective? bijective?

(6) Montrer que la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par la formule ci-dessous, est impaire

$$f(x) = \frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}.$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1.$$

Partie 1. Étude de f

(1) (a) Préciser l'ensemble de définition de f.
(b) Étudier le sens de variation de f sur son ensemble de définition.
(c) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Donner une interprétation graphique des résultat obtenus. Former le tableau de variations de f.

(2) (a) Déterminer le signe de $1-\sqrt{x^2+1}$ suivant la valeur de x.
(b) En déduire le signe $f(x)-x$ (qu'on synthétisera sous forme d'un tableau) et que les solutions de l'équation $f(x) = x$ sont -1 et 0.

(3) Tracer la courbe représentative de f et la droite d'équation $y = x$.

(4) Compléter l'ensemble des instructions suivantes qui permettraient d'obtenir ce même graphique, sur l'intervalle $[-10; 10]$, sous `SciLab`

```
function y=f(x)
    y=..................
endfunction

x=-10:0.1:10
y=..................

plot2d(x,y, style=5) //le style=5 permet d'obtenir la courbe de f en rouge
plot2d(x,.......) //droite d'équation y=x
```

Partie 2. Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) Que dire de (u_n) si $u_0 = -1$ ou $u_0 = 0$?

(2) On suppose ici $u_0 < -1$.
(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < -1$.
(b) En déduire que (u_n) est croissante. (*On pensera à utiliser le signe de* $f(x) - x$.)
(c) Montrer que (u_n) converge vers un réel que l'on déterminera.

(3) On suppose ici $-1 < u_0 < 0$.
(a) Montrer que $-1 < u_1$, que $u_1 < u_0$, puis que (u_n) est décroissante et minorée par -1.
(b) En déduire qu'elle converge vers -1.

(4) On suppose ici $u_0 > 0$. Sans en donner de démonstration, quel résultat obtiendrait-on concernant la convergence de (u_n) dans ce cas?

(5) Écrire, sous `SciLab` une suite d'instruction qui, en fonction d'un premier terme u_0 et d'un rang n entrés par l'utilisateur, affiche le terme u_n correspondant.

Exercice 3

Partie A

Pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}$$

On note $A = M(1,0)$ et $B = M(0,1)$.

(1) Expliciter A et B.
(2) Déterminer deux réels λ et μ (dépendant de x et y) tels que

$$M(x,y) = \lambda A + \mu B.$$

(3) Déterminer une matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et telle que

$$AP = PD_A \qquad \text{où} \qquad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(4) Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1} (faire figurer le détail des calculs sur la copie).
(5) Montrer que la matrice D_B définie par $D_B = P^{-1}BP$ est diagonale.
(6) En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}.$$

(7) En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $M(x, y)$ soit inversible.

Partie B

On souhaite dans cette partie étudier les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} & = & 3a_n + 4b_n - c_n \\ b_{n+1} & = & -4a_n - 5b_n + c_n \\ c_{n+1} & = & -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

(1) Que vaut X_0 ?
(2) Déterminer une matrice C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$$X_{n+1} = CX_n.$$

Déterminer ensuite deux réels x et y tels que $C = M(x, y)$.
(3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0$.
(4) À l'aide des résultats de la partie A, exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 4

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques, numérotés de 1 à 12.

Une personne fait tourner la roue devant un repère fixe. On suppose que chaque secteur a la même probabilité de s'arrêter devant ce repère.

À chaque partie, un joueur mise une certaine somme d'argent en choisissant un, deux ou trois numéros sur les 12; il est gagnant si le secteur qui s'arrête devant le repère porte l'un des numéros qu'il a choisis.

Un joueur possèdant un crédit illimité, effectue une suite de parties en adoptant la stratégie suivante:

- Il mise sur le chiffre 1 à la première partie.
- S'il perd à la $n^{ième}$ partie, $n \geq 1$, il mise uniquement sur les chiffres 1 et 2 à la partie suivante et s'il gagne à la $n^{ième}$ partie, il mise sur les chiffres 1, 3 et 5.

(1) On note p_n la probabilité de l'événement A_n : « le joueur gagne la $n^{ième}$ partie ».
   (a) Calculer les probabilité conditionnelles $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$, en déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = \frac{1}{12}p_n + \frac{1}{6}.$$
   (b) En déduire l'expression de p_n en fonction de n et déterminer
$$\lim_{n\to+\infty} p_n.$$

(2) Soit $k \in [\![1;n]\!]$, on note B_k l'événement : « le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties et ce gain a lieu à la $k^{ième}$ partie ».
   (a) À l'aide de la formule des probabilités composées, calculer $P(B_n)$.
   (b) Soit $k \in [\![1;n-1]\!]$, calculer $P(B_k)$.
   (c) En déduire la probabilté q_n que le joueur ne gagne qu'une seule fois au cours des n premières parties.