ECE 1 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Devoir Surveillé

Solution

Exercice 1 - Questions de cours

Les questions de cet exercice sont indépendantes

(1) On commence par observer que

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Or, pour tout $k \leq 2n$, on a $1/k \geq 1/2n$. Mais, alors

$$H_{2n} - H_n \geq \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=n}^{2n} 1 = \frac{1}{2}.$$

Si (H_n) converge vers une certaine limite ℓ, alors (H_{2n}) aussi, donc $(H_{2n} - H_n)$ converge vers $\ell - \ell = 0$. Mais

$$\frac{1}{2} \leq H_{2n} - H_n \longrightarrow \ell - \ell = 0$$

est alors absurde. Donc (H_n) diverge. Comme si s'agit d'une suite définie par une somme de termes positifs, elle est clairement croissante et par convergence monotone, celle-ci diverge vers $+\infty$.

(2) On considère la fonction

$$f\,:\; x \mapsto \frac{2x^2 - \ln(x) + 1}{1+x}, \qquad x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Commençons par repérer les termes prépondérants en $+\infty$. Au numérateur, par un argument de croissance comparée, c'est $2x^2$. Au numérateur, c'est la puissance la plus élevée, soit x. On factorise. On a

$$f(x) = \frac{2x^2\left(1 - \frac{\ln(x)}{2x^2} + \frac{1}{2x^2}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{2x\left(1 - \frac{\ln(x)}{2x^2} + \frac{1}{2x^2}\right)}{1+\frac{1}{x}},$$

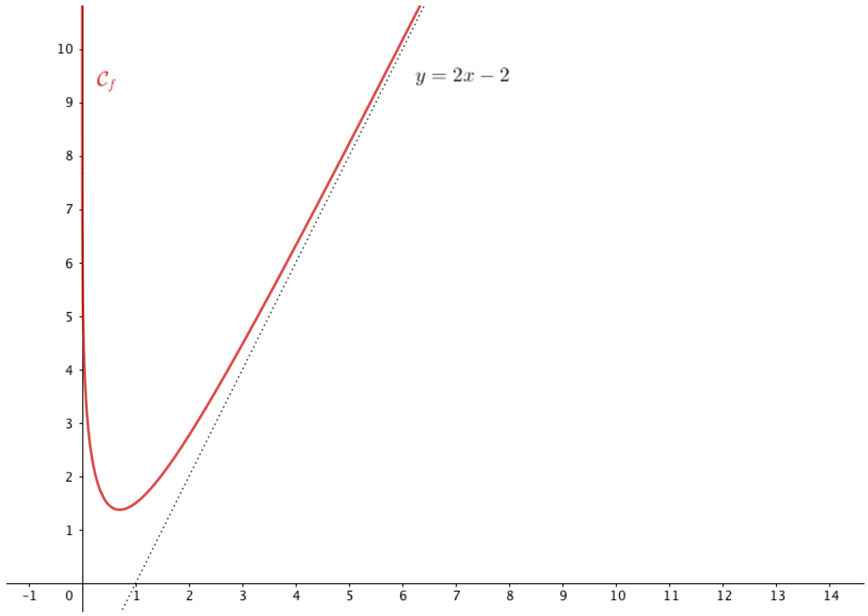
ce qui tend bien vers $+\infty$, lorsque $x \to +\infty$. Cette écriture permet sans mal d'obtenir la limite de $f(x)/x$.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{2x\left(1 - \frac{\ln(x)}{2x^2} + \frac{1}{2x^2}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{2\left(1 - \frac{\ln(x)}{2x^2} + \frac{1}{2x^2}\right)}{1+\frac{1}{x}},$$

ce qui tend vers 2. Mais maintenant,

$$\begin{aligned} f(x)-2x &= \frac{2x\left(1-\frac{\ln(x)}{2x^2}+\frac{1}{2x^2}\right)}{1+\frac{1}{x}}-2x \\ &= \frac{2x\left(1-\frac{\ln(x)}{2x^2}+\frac{1}{2x^2}\right)-2x-2}{1+\frac{1}{x}} \\ &= \frac{-2-\frac{\ln(x)}{x}+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} \end{aligned}$$

ce qui tend vers -2. Ainsi, la droite d'équation $y=2x-2$ est asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$. On ne résiste pas à l'envie d'un joli dessin



(3) Le calcul donne

$$B^2+B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Si B est inversible, il existe une matrice B^{-1} telle que $BB^{-1}=I_2$. Mais alors, d'une part

$$B^{-1}(B^2+B)=B^{-1}\cdot 0_2=0_2$$

et d'autre part

$$B^{-1}(B^2+B)=B^{-1}B^2+B^{-1}B=B+I_2.$$

Mais $B+I_2=0$ donne $B=-I_2$, ce qui n'est pas vrai. Ainsi, B n'est pas inversible.

(4) Compléter la fonction `SciLab` ci-dessous afin qu'elle renvoie la matrice $((-1)^{i+j})_{1\leq i,j\leq n}$ où n est l'unique argument de la fonction

```
function M=matrice(n)
    M=zeros(n,n)
    for i=1:n
        for j=1:n
          M(i,j)=(-1)^(i+j)
        end
    end
endfunction
```

(5) On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+1)^2(y-3) \end{array}$$

La présence d'un carré nous met sur la voie d'une fonction non injective. Essayons par exemple de trouver deux valeurs de x différentes telles que $(2x+1)^2 = 1$. Il faut que $2x+1 = 1$ ou que $2x+1 = -1$. Il suffit donc de prendre $x = 0$ ou $x = -1$. On voit alors que

$$f(0,0) = -3 = f(-1,0), \qquad \text{alors que} \qquad (0,0) \neq (-1,0)$$

donc f n'est pas injective et *a foritiori* pas surjective. En revanche, elle est surjective. Soit $z \in \mathbb{R}$, il faut montrer que l'équation $f(x,y) = z$ admet (au moins) une solution $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Choisissons $x = 0$ de sorte que $(2x+1)^2 = 1$. Il faut donc résoudre $y - 3 = z$, ce qui donne $y = z + 3$. Ainsi,

$$f(0, z+3) = z,$$

et tout $z \in \mathbb{R}$ admet des antécédents par f qui est bien surjective.

(6) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{-xe^x}{(1+e^x)^2} \\ &= \frac{-xe^x}{(e^x e^{-x} + e^x)^2} = \frac{-xe^x}{(e^x(e^{-x}+1))^2} \\ &= \frac{-xe^x}{e^{2x}(1+e^{-x})^2} \\ &= \frac{-xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \\ &= -f(x), \end{aligned}$$

et f est bien impaire.

Exercice 2 - D'après EML 1993

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1.$$

Partie 1. Étude de f

(1) (a) Pour tout x réel, $x^2+1>0$, ainsi f est définie sur $\mathbb{R}$.

(b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction racine est dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout x réel, $x^2+1>0$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+1)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\sqrt{x^2+1}^2} = \frac{x^2+1-x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)} = \frac{-x+1}{\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)}$$

qui est du signe de $-x+1$. Donc f est croissante sur $]-\infty,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$.

(c) Concernant les limites:

$$f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x(1+1/x)}{\sqrt{x^2(1+1/x^2)}} - 1 = \frac{x(1+1/x)}{\sqrt{x^2}\sqrt{(1+1/x^2)}} - 1 = \frac{x(1+1/x)}{|x|\sqrt{(1+1/x^2)}} - 1$$

donc en $+\infty$, f tend vers 0 et en $-\infty$, f tend vers -2. On en déduit le tableau de variations de f:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f	-2	$\nearrow$	$\sqrt{2}-1$	$\searrow$	0

(2) (a) Multiplions par la quantité conjuguée

$$1-\sqrt{x^2+1} = \frac{1^2 - \sqrt{x^2+1}^2}{1+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1-x^2-1}{1+\sqrt{x^2+1}} = \frac{-x^2}{1+\sqrt{x^2+1}}.$$

Le signe de cette quantité est le même que celui de $-x^2$: c'est partout négatif et cela s'annule en 0.

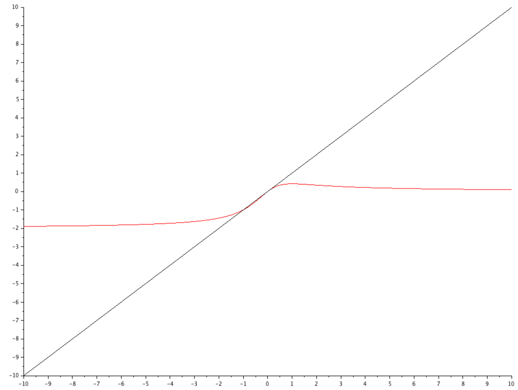
(b) Il suffit ici de factoriser et d'utiliser la question précédente:

$$f(x) - x = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 - x = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - (1+x) = (x+1)\,\frac{1-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}},$$

ce qui permet d'en déduire facilement le signe et les points fixes (solutions de $f(x)-x=0$):

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$-$	

(3) Voici la figure tracée par `SciLab` sur $[-10;10]$ (on propose également un zoom sur $[-2;2]$)



(4) Et les commandes permettant le tracé:

```
function y=f(x)
    y=(1+x)/sqrt(x^2+1) - 1;
endfunction

x=-10:0.1:10
y=feval(x, f)

plot2d(x,y, style=5) //le style=5 permet d'obtenir la courbe de f en rouge
plot2d(x,x) //droite d'équation y=x
```

Partie 2. Étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

(1) Si $u_0 = -1$ on a alors pour tout entier n, $u_n = -1$ et si $u_0 = 0$ alors pour tout entier n, $u_n = 0$. Choisir comme premier terme de la suite un point fixe de la fonction génère une suite constante.

(2) On suppose ici $u_0 < -1$.
  (a) On procède par récurrence. Pour $n = 0$ on a bien $u_0 < -1$.
  Soit n entier tel que $u_n < -1$ alors u_n et -1 appartiennent à $]-\infty, 1]$ et f y est croissante strictement donc $f(u_n) < f(-1)$ et $u_{n+1} < -1$, ce qui termine la récurrence.
  (b) On utilise le signe de $f(x) - x$ sur $]-\infty; -1[$ où se trouvent bien, d'après la question précédente, tous les termes de la suite. Plus précisément, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n > 0$ et la suite est bien croissante.
  (c) La suite (u_n) est croissante et majorée par -1. Elle est donc convergente par application du théorème de convergence monotone. Soit ℓ sa limite. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle l'est en ℓ. Par passage à la limite dans la relation de récurrence définissant u_{n+1}, on obtient que $\ell = f(\ell)$ qui ne peut être vrai que si $\ell = 0$ ou $\ell = -1$. Mais, tous les termes de la suite étant inférieurs à -1, on a que $\ell \leq -1$ et par conséquent $\ell = -1$.

(3) On suppose ici $-1 < u_0 < 0$.
  (a) Comme f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ et que -1 et u_0 en sont éléments, $f(-1) < f(u_0)$ et donc $-1 < u_1$.
  Comme $f(x) < x$ sur $]-1, +\infty[$ et que $u_0 > -1$, on a $u_1 = f(u_0) < u_0$. Donc pour $n = 0$, on a $-1 < u_1 < u_0 < 0$. Soit n tel que $-1 < u_{n+1} < u_n < 0$.

Comme f est strictement croissante sur $]-\infty, 1]$ et que -1, u_{n+1}, u_n et 0 en sont éléments, $f(1) < f(u_{n+1}) < f(u_n) < f(0)$ et $1 < u_{n+2} < u_{n+1} < 0$ puis que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par -1.

(b) Elle est donc convergente (toujours par convergence monotone). Soit ℓ sa limite. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en ℓ. Donc ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ et $\ell = -1$ ou $\ell = 0$. Mais comme (u_n) est décroissante, elle est majorée par u_0. Et par passage à la limite on a: $\ell \leq u_0 < 0$ Donc $\ell \neq 0$ et $\ell = -1$.

(4) On suppose ici $u_0 > 0$. On a alors $f(u_0) = u_1 < f(1) < 1$ donc on se retrouve dans la situation précédente à partir du premier terme de cette suite.

(5) On écrit ce programme sans peine

```
n=input('rang=?')
u=input('u0=?')
for k=1:n
    u=(1+u)/sqrt(1+u^2)-1;
end
disp(u)
```

Exercice 3 - D'après ECRICOME 2016

Partie A

(1) On remplace x par 1 et y par 0 pour A et on fait l'inverse pour B. On obtient

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) Il est vraiment facile de voir que

$$M(x,y) = xA + yB.$$

(3) On cherche une matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ telle que $AP = PD_A$. Il suffit de résoudre le système correspondant:

$$\begin{aligned} AP = PD_A \quad & \iff \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \\ & \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3 - 2a + 2d & = & 1 \\ -6 - 2b + 2e & = & -4 \\ 3 - 2c + 2f & = & 3 \\ -1 + 4a - 2d & = & a \\ 2 + 4b - 2e & = & 2b \\ -1 + 4c - 2f & = & 3c \\ -4a - d & = & d \\ 4b - e & = & 2e \\ 4c - f & = & 3f \end{array} \right. \\ & \iff \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(4) Utilisons la méthode du pivot pour déterminer P^{-1}.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On fait $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_2 \leftarrow L_3 + 2L_1$. On obtient:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

On fait ensuite $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Enfin, on fait $L_1 \leftarrow L_1 + 2L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

On peut donc conclure (après avoir vérifié que $PP^{-1} = I_3$) que

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(5) On voit que

$$D_B = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ce qui est bien une matrice diagonale.

(6) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$M(x, y) = xA + yB = xPD_AP^{-1} + yPD_BP^{-1} = P(xD_A + yD_B)P^{-1} = PD(x, y)P^{-1}$$

où on a posé $D(x, y) = xD_A + yD_B$.

(7) On voit alors que $M(x, y)$ est inversible si et seulement si $D(x, y)$ est inversible. Or,

$$D(x, y) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & 2x - y & 0 \\ 0 & 0 & 3x - y \end{pmatrix}$$

est inversible si et seulement si $x \neq 0$ et $2x - y \neq 0$ et $3x - y \neq 0$ (matrice diagonale). Par conséquent, $M(x, y)$ est donc inversible si et seulement si $x \neq 0$ et $2x - y \neq 0$ et $3x - y \neq 0$.

Partie B

(1) Par lecture de l'énoncé : $X_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(2) Soit $C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ -4 & -5 & 1 \\ -6 & -8 & 2 \end{pmatrix}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$CX_n = \begin{pmatrix} 3a_n + 4b_n - c_n \\ -4a_n - 5b_n + c_n \\ -6a_n - 8b_n + 2c_n. \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Enfin, $C = A + 3B = M(1, 3)$.

(3) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0$.
Initialisation : On a $C^0 = I$, donc $C^0 X_0 = IX_0 = X_0$. On a bien l'hypothèse vérifiée au rang $n = 0$.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que, pour un certain $n \geq 0$, $X_n = C^n X_0$. Mais alors,

$$X_{n+1} = CX_n \underset{\text{par (HR)}}{=} CC^n X_0 = C^{n+1} X_0.$$

La propriété est bien héréditaire. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0$.

(4) D'après la question (6) de la partie A, on a

$$C = A + 3B = P(D_A + 3D_B)P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

On peut alors montrer par une récurrence immédiate que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$C^n = P(D_A + 3D_B)^n P^{-1}.$$

Il suit que

$$C^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

et que

$$X_n = C^n X_0 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2(-1)^n \\ -1 + 3(-1)^n \\ -2 + 4(-1)^n \end{pmatrix}.$$

Comme $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \begin{cases} a_n = 1 - 2(-1)^n \\ b_n = -1 + 3(-1)^n \\ c_n = -2 + 4(-1)^n \end{cases}$$

Exercice 4 - D'après INSEEC 2002

Une roue de loterie se compose de secteurs identiques, numérotés de 1 à 12.

Une personne fait tourner la roue devant un repère fixe. On suppose que chaque secteur a la même probabilité de s'arrèter devant ce repère.

À chaque partie, un joueur mise une certaine somme d'argent en choisissant un, deux ou trois numéros sur les 12; il est gagnant si le secteur qui s'arrète devant le repère porte l'un des numéros qu'il a choisis.
Un joueur possèdant un crédit illimité, effectue une suite de parties en adoptant la stratégie suivante:

- Il mise sur le chiffre 1 à la première partie.
- S'il perd à la $n^{ième}$ partie, $n \geq 1$, il mise uniquement sur les chiffres 1 et 2 à la partie suivante et s'il gagne à la $n^{ième}$ partie, il mise sur les chiffres 1, 3 et 5.

(1) (a) Sauf pour la première partie où il ne mise que sur un numéro, quand il a gagné la partie précédente, il mise sur 3 numéros parmi 12 équiprobables. Quand il a perdu, par contre, il ne mise que sur 2 numéros. On en déduit les probabilités (conditionnelles) suivantes:

$$P(A_1) = 1/12, \qquad P_{A_n}(A_{n+1}) = 3/12 = 1/4 \qquad \text{et} \qquad P_{\overline{A}_n}(A_{n+1}) = 2/12 = 1/6.$$

Comme $\left(A_n, \overline{A}_n\right)$ est un système complet d'événements alors

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P_{A_n}(A_{n+1}) P(A_n) + P_{\overline{A}_n}(A_{n+1}) P\left(\overline{A}_n\right) \\ &= \frac{1}{4} P(A_n) + \frac{1}{6} P\left(\overline{A}_n\right) \\ &= \frac{1}{4} P(A_n) + \frac{1}{6}(1 - P(A_n)) \\ &= \frac{1}{12} P(A_n) + \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

et on a donc bien

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad p_{n+1} = \frac{1}{12} p_n + \frac{1}{6}.$$

(b) Cette suite est arithmético-géométrique. On détermine donc un réel ℓ tel que

$$\ell = \frac{1}{12}\ell + \frac{1}{6} \Leftrightarrow \ell = \frac{2}{11}.$$

Puis, on définit alors la suite (u_n) par $u_n = p_n - \ell$ et on a pour tout entier $n \geq 1$

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \ell = \frac{1}{12} p_n + \frac{1}{6} - \left(\frac{1}{12}\ell + \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}(p_n - \ell) = \frac{1}{12} u_n.$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison 1/12 donc pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \times u_1 = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \times \left(p_1 - \frac{2}{11}\right) = \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \times \left(\frac{1}{12} - \frac{2}{11}\right) \\ p_n &= u_n + \ell = \frac{2}{11} - \frac{1}{132}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} \longrightarrow \frac{2}{11} \text{ quand } n \to +\infty \text{ car } \left|\frac{1}{12}\right| < 1. \end{aligned}$$

(2) Soit $k \in [\![1; n]\!]$, on note B_k l'événement : « le joueur gagne une seule fois au cours des n premières parties et ce gain a lieu à la $k^{ième}$ partie ».

(a) On peut exprimer B_n comme suit

$$B_n = \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \ldots \overline{A}_{n-1} \cap A_n$$

et par la *formule des probabilités composées*

$$P(B_n) = P(\overline{A}_1) \times P_{\overline{A}_1}(\overline{A}_2) \times \cdots \times P_{\bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{A}_k}(A_n).$$

Le conditionnement précise qu'à partir du second jeux, le joueur ne mise que sur 2 jetons donc la probabilité de perdre est de $10/12 = 5/6$ et $P(\overline{A}_1) = 11/12$ donc

$$P\left(B_n\right) = \frac{11}{12} \times \frac{5}{6} \times \cdots \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{72}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}.$$

(b) De manière analogue

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \cap \left(\bigcap_{k=2}^{n} \overline{A}_k\right) \\ P(B_1) &= P(A_1) \times P_{A_1}(\overline{A}_2) \times \cdots \times P_{A_1 \cap \left(\bigcap_{k=2}^{n-1} \overline{A}_k\right)}(\overline{A}_n) \\ &= \frac{1}{12} \times \frac{3}{12} \times \frac{10}{12} \times \ldots \frac{10}{12} \\ &= \frac{1}{48}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}. \end{aligned}$$

et, pour $k \in [\![2; n-1]\!]$,

$$\begin{aligned} B_k &= \overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_{k-1} \cap A_k \cap \overline{A}_{k+1} \cap \cdots \cap \overline{A}_n \\ P(B_k) &= \frac{11}{12} \times \left(\frac{10}{12}\right)^{k-2} \times \frac{9}{12} \times \frac{2}{12} \times \left(\frac{10}{12}\right)^{n-k-1} \\ &= \frac{11}{96}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3}. \end{aligned}$$

(c) En notant B le fait de gagner exactement une fois, on a clairement

$$B = \bigcup_{k=1}^{n} B_k$$

où la réunion est **disjointe**. Il suit donc que

$$\begin{aligned} q_n &= P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k) \\ &= \frac{1}{48}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{11}{96}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} + \frac{11}{72}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \\ &= \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{48} + \sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{11}{96} \times \frac{5}{6}\right) + \frac{11}{72}\right) \\ &= \frac{55n - 110}{576}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}. \end{aligned}$$