T.P. Janvier 2018

Suites et représentations graphiques

Exercice 1.

(1) (a) Deviner l'affichage du programme suivant avant de l'exécuter:

```
u=0
for k=1:6
    u=2*u+3
    disp(u)
end
```

(b) Quelle est la suite définie dans ce programme?
(c) Modifier le programme précédent pour qu'il affiche uniquement u_{100}.
(d) Écrire un programme sans boucle `for` qui affiche le terme u_n.

(2) (a) Écrire une fonction `u=suite(n)` permettant de calculer u_n où la suite (u_n) est définie par

$$u_0 = 0, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}.$$

(b) Représenter graphiquement, à l'aide de la commande `plot2d()` les 100 premiers termes de la suite. Conjecturer quant à la nature de la suite et, en cas de convergence donner une valeur approchée de la limite éventuelle.
(c) Démontrer le résultat conjecturé ci-dessus.

Exercice 2.

(1) Dans chacun des cas suivants, écrire un programme qui demande à l'utilisateur un entier n et affiche le terme u_n :
(a) $u_0 = 0.1$ et, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = e^{-2u_n}$.
(b) $u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = 2nu_n + 3$.
(2) Modifier les programmes précédents pour en faire des fonctions.

Exercice 3. (D'après **EML 2017**) On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 2, \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \exp(u_n) - e\ln(u_n).$$

(1) Montrer que (u_n) et bien définie et que, pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq 2$.
(2) En étudiant les variations puis le signe de la fonction $x \mapsto e^x - e\ln(x) - x$ sur $[2; +\infty[$, montrer que (u_n) est croissante puis montrer qu'elle diverge vers $+\infty$.
(3) Écrire un programme qui, étant donné un réel $A \geq 0$ renvoie un entier naturel N tel que $u_N \geq A$.

☞ Il est très courant, dans les exercices de concours et notamment à l'**EML**, de voir apparaître ce type de programme où, après une étude de suite récurrente, on demande de calculer le premier entier n pour lequel u_n satisfait une certaine condition, en lien avec son comportement asymptotique.

Exercice 4. Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & \in & \mathbb{R} \\ u_{n+1} & = & u_n - u_n^2 \end{cases}$$

(1) Que peut-on dire du sens de variation de (u_n)?
(2) Écrire un programme qui demande à l'utilisateur un réel u_0 et un entier n et affiche le terme u_n.
(3) On suppose que $u_0 = \frac{3}{4}$.
  (a) Calculer u_n pour des valeurs de plus en plus grandes de n. Que semble-t-il se produire?
  (b) Écrire un programme qui détermine la plus petite valeur de n telle que $u_n < 10^{-3}$.
(4) On suppose que $u_0 = 2$.
  (a) Calculer u_n pour des valeurs de plus en plus grandes de n. Que semble-t-il se produire?
  (b) Écrire un programme qui détermine la plus petite valeur de n telle que $u_n < -10^8$.

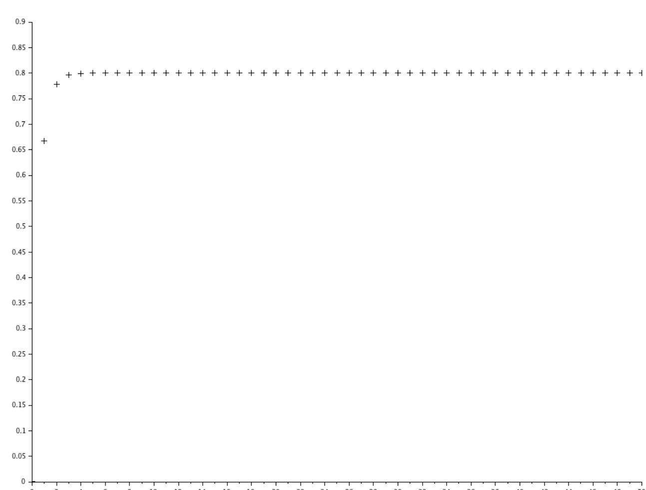
Exercice 5. (Suites à récurrence linéaire d'ordre 2). On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad \text{et} \quad u_{n+2} = \frac{7}{2}u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n.$$

(1) Compléter la fonction `SciLab` suivante afin qu'elle renvoie le terme général u_n en fonction de n

```
function res=U(n)
    Uold=.....
    Unew=.....
    for i=.......
        aux=.....
        Uold=.....
        Unew=.....
    end
    res=.....
endfunction
```

(2) Le graphique suivant représente les termes de la suite (z_n) définie par $z_n = u_n/3^n$, pour $0 \leq n \leq 50$.



  (a) Donner une suite d'instructions permettant l'obtention de la figure ci-dessus.
  (b) Par lecture graphique, déterminer la limite de z_n.
  (c) Quelle est l'expression du terme général de (u_n)?

Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$: schéma en escalier

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 10 \\ u_{n+1} & = & u_n - \ln(u_n) \end{cases}.$$

On introduit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x) = x - \ln(x).$$

(1) Écrire, sous `SciLab`, une fonction `y=f(x)` permettant le calcul de $f(x)$ ci-dessus définie.

(2) Que font les instructions suivantes ?

```
x=0.01:0.01:10
y=feval(x, f)
plot2d(x,y, style=2) //style=2 donne du bleu
plot2d(x,x, style=3) //style=3 donne du vert
```

(3) On veut représenter graphiquement le processus itératif permettant de générer les termes de la suite. On part d'un point A_0 de coordonnées (u_0, u_0) (c'est donc un point de la droite $y = x$) et d'un point B_1 de coordonnées $(u_0, f(u_0))$.

Si A_n et B_n sont déjà construits (pour un certain $n \in \mathbb{N}$), on construit B_{n+1} de coordonnées $(u_n, f(u_n))$ puis A_{n+1} de coordonnées (u_{n+1}, u_{n+1}).

On veut créer la *ligne brisée* reliant les points $A_0B_1A_1B_2....A_n$.

(a) Faire un schéma à main levée pour bien comprendre le processus.

(b) Écrire la liste des abscisses de la ligne brisée. Quelle est la longueur ?

(c) Même question avec celle des ordonnées.

(d) Compléter le script ci-dessous permettant de créer la ligne brisée susmentionnée jusqu'au point A_n, où n est rentré par l'utilisateur.

```
n=input('n=?')
X=zeros(1, 2*n+2)
X(1)=..........
for k=1:2:2*n+1
    X(k+1)=...............
    X(k+2)=...............
end

Y=X(2:2*n+2)

plot2d(.........., Y, style=5) //style=5 donne du rouge
```

(e) Que permet d'ajouter à la figure la ligne suivante

```
plot2d(X(1:2:2*n+1), X(1:2:2*n+1), -1)
```

(f) Que peut-on conjecturer à propos de la suite (u_n)?