ECE 1 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

T.P. d'Informatique

Matrices.

Si n et p sont deux entiers supérieurs ou égaux à 1 et que $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix},$$

on peut définir la matrice A dans `SciLab` par la syntaxe

`A=[`$a_{1,1}, ..., a_{1,p}; a_{2,1}, ..., a_{2,p}; ....; a_{n,1}, ..., a_{n,p}$`]`.

Les coefficients d'une même ligne sont séparés par des virgules et on indique le changement de ligne par un point-virgule.

Si `A` est une matrice déjà définie:

- l'instruction `A(i,j)` renvoie le coefficient à la `i`-ème ligne et `j`-ième colonne.
- l'instruction `size(A)` renvoie le vecteur ligne `[L,C]` où `L` est le nombre de lignes de `A` et `C` le nombre de colonnes. L'instruction `length(A)` renvoie quant à elle le nombre $L \times C$ de ses coefficients.

Les opérations `+` ou `*` permettent de faire des opérations sur les matrices (multiplication par un réel, additions et multiplications de deux matrices lorsque cela a un sens).

Si `A` est une matrice carrée déjà définie et si `k` est un entier (naturel), l'instruction `A^k` permet de calculer les puissances de `A`. Si la matrice est inversible, on peut étendre l'instruction à `k` entier relatif.

L'instruction `eye(n,n)` renvoie la matrice identité de taille `n`; l'instruction `zeros(n,p)` construit une matrice ne contenant que des zéros et `ones(n,p)` une matrice ne contenant que des 1.

Enfin, l'instruction `A'` renvoie transposée de la matrice `A`.

Exercice 1.

(1) Définir dans la console `SciLab` les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

(2) Que renvoient les instructions suivantes

`A+B`, `A*B`, `A+C`, `A*C`, `A'*C`, `B^2`, `B^(-1)`, `C^(-1)` , `C*C^(-1) - eye(3,3)`?

(3) Que renvoie `A(3)`? `A(5)`?

(4) Taper l'instruction `A(3,3)=1;` puis `A`. Que s'est-il passé?

(5) Même question si on tape `A(4,5)=-2`.

Exercice 2. Écrire un programme qui demande à l'utilisateur de rentrer un entier strictement positif n et affiche la matrice

$$\left((-1)^{i+j}\right)_{1\leq i,j\leq n} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \cdots & (-1)^{n+1} \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & (-1)^{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (-1)^{n+1} & (-1)^{n+2} & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

(1) Définir les matrices précédentes dans la console `SciLab`.
(2) Calculer $A^2 + A - 2I_3$.
(3) Introduire la matrice $B = \frac{1}{2}(A + I_3)$ puis calculer AB et BA. Ce résultat était-il prévisible?
(4) Taper l'instruction `A^(-1)==B`. Que se passe-t-il?
(5) Vérifier que P est inversible et calculer $Q = P^{-1}$.
(6) Vérifier que $P^{-1}AP$ est diagonale.

L'instruction `inv(A)` renvoie également, si la matrice est inversible, l'inverse de `A`. L'instruction `rank(A)` renvoie le **rang** de la matrice, c'est à dire le nombre de pivots non nuls. Si la matrice est carrée et que son rang est égal à son nombre de lignes (ou de colonnes), alors la matrice est inversible.

Exercice 4. Écrire un programme demandant à l'utilisateur de rentrer une matrice carrée, vérifiant que celle-ci est bien carrée puis affichant un message de réponse concernant l'inversibilité de la matrice. Si la matrice est inversible, le programme affichera aussi l'inverse, sinon elle précisera le rang.

Exercice 5. (Résolution de système) On considère le système linéaire suivant

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 3x & - & 2y & & & + & t & = & 3 \\ -5x & + & 3y & - & 2z & + & 2t & = & 3 \\ x & - & y & + & z & - & t & = & -2 \\ 4x & - & 10y & + & 7z & - & 4t & = & -11 \end{array}\right. .$$

(1) On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -2 \\ -11 \end{pmatrix}$. Introduire une matrice A telle que $AX = B$.
(2) Montrer que le système est de Cramer si et seulement si A est inversible. Comment obtient-on alors X?
(3) Utiliser `SciLab` pour résoudre le système.

La commande `diag()` prend en argument une matrice ligne ou colonne (de longueur n) et créé la matrice diagonale de taille $n \times n$ dont la diagonale est composée des coefficients de la matrice ligne ou colonne en argument. En ajoutant un paramètre `1` ou `-1` en second argument de `diag()`, les coefficients apparaîtront sur la surdiagonale ou sur la sous-diagonale.

Exercice 6.

(1) Taper puis observer ce que font les instructions `diag(2*ones(7,1))` puis `diag(-3*diag(4,1),1)`.

(2) En déduire une suite de commandes permettant de créer la matrice A de taille 8×8 définie par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 3 & -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & 3 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

(3) Écrire une fonction prenant en argument un entier n, trois réels a, b, c et renvoyant la matrice carrée de taille n ci-dessous.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & a & b & \ddots & & \vdots \\ 0 & c & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c & a \end{pmatrix}$$

Si `A` est une matrice de taille $n \times p$ déjà définie, la commande `A(i,:)` renvoit la $i-$ème ligne de `A`, alors que `A(:,j)` renvoit la $j-$ième colonne.

Exercice 7. (Matrices stochastiques)

On dit qu'une matrice est *stochastique* si tous ses coefficients sont positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chaque ligne est égale à 1. Écrire un programme demandant à l'utilisateur de rentrer une matrice et affichant si la matrice est stochastique ou non.

Exercice 8. (Matrices de Van der monde et interpolation polynomiale)

Soient $x_0, x_1, ..., x_n$ des réels. On appelle matrice de Van der monde associée à (x_i) la matrice

$$V(x_0, ..., x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}.$$

(1) Écrire une fonction `M=vandermonde(X)` prenant en argument un vecteur-ligne $X = [x_0, x_1, ..., x_n]$ et renvoyant la matrice de Van der monde associée.

(2) Application: on cherche à résoudre un *problème d'interpolation polynomiale.* C'est à dire que, étant donnés $x_0, x_1, ..., x_n$ des réels deux à deux distincts et $y_0, y_1, ..., y_n$ d'autre réels, on veut trouver un polynôme P de degré $n+1$ tel que

$$\forall i \in [\![0; n]\!], \qquad P(x_i) = y_i.$$

(a) Notant $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ les coefficients du polynôme P, montrer que P solution du problème d'interpolation est équivalent à

$$V(x_0, ..., x_1) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

(b) En déduire l'écriture d'une fonction `interpolation()` prenant en arguments deux vecteurs lignes `x=`$[x_0, x_1, ..., x_n]$ et `y=`$[y_0, y_1, ..., y_n]$ et renvoyant le polynôme solution du problème d'interpolation correspondant.

Exercice 9. (D'après **HEC 2018**) Soit $Q_n = (q(\ell,k))_{(\ell,k)\in[\![1;n]\!]^2}$ une matrice carrée de taille n dont les coefficients vérifient les relations suivantes

(i) $\forall k \geq 1, \quad q(1,k) = 1$

(ii) $\forall (\ell,k)$ tel que $1 \leq k \leq \ell, \quad q(\ell,k) = p(k) \quad$ (où $p(k)$ ne dépend que de k et $p(1) = 1$)

(iii) $\forall (\ell,k)$ tel que $k > \ell \geq 2, \quad q(\ell,k) = q(\ell-1,k) + q(\ell,k-\ell)$

(iv) $\forall \ell \geq 2, \quad q(\ell,\ell) = 1 + q(\ell-1,\ell)$.

(1) Écrire *à la main*, les matrices Q_2 et Q_3.

(2) La fonction `SciLab` suivante dont le script est incomplet (lignes (5) et (6)), calcule une matrice `qmatrix(n)` telle que pour chaque couple $(\ell,k) \in [\![1;n]\!]^2$, le coefficient situé à l'intersection de la ligne ℓ et de la colonne k est égal à $q(l,k)$.

```
(1) function q=qmatrix(n)
(2)    q=ones(n,n)
(3)    for L=2:n
(4)        for K=2:n
(5)           if (K<L) then q(L,K)= .......... ;
(6)                else if (K==L) then q(L,K)= ............. ;
(7)                    else q(L,K)=q(L-1,K)+q(L,K-L);end;
(8)            end
(9)        end
(10)   end
(11) endfunction
```

L'application de la fonction `qmatrix` à l'entier $n = 9$ fournit la sortie suivante :

```
--> qmatrix(9)

   1.   1.   1.   1.   1.   1.    1.    1.    1.
   1.   2.   2.   3.   3.   4.    4.    5.    5.
   1.   2.   3.   4.   5.   7.    8.    10.   12.
   1.   2.   3.   5.   6.   9.    11.   15.   18.
   1.   2.   3.   5.   7.   10.   13.   18.   23.
   1.   2.   3.   5.   7.   11.   14.   20.   26.
   1.   2.   3.   5.   7.   11.   15.   21.   28.
   1.   2.   3.   5.   7.   11.   15.   22.   29.
   1.   2.   3.   5.   7.   11.   15.   22.   30.
```

(a) Compléter les lignes (5) et (6) du script de la fonction `qmatrix`.

(b) Donner un script `SciLab` permettant de calculer $p(n)$ à partir d'une valeur de n entrée au clavier.

(c) Conjecturer une formule générale pour $q(2,k)$ applicable à tout entier $k \geq 1$, puis la démontrer.