ECE 1 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 12. Injections, surjections, bijections

Ce très bref chapitre présente les notions d'injectivité, surjectivité et de bijectivité pour des applications après un bref rappel de théorie des ensembles.

La notion de *bijectivité* est cruciale et apparaît sous diverses formes dans le cours de mathématiques en ECE. On la retrouve avec le théorème de bijection pour les fonctions continues et strictement monotone (avec une application à l'étude des suites implicites) mais aussi en algèbre linéaire.

1 Compléments sur la théorie des ensembles

1.1 Généralités: ensembles et sous-ensembles

Définition 1. *Si $u_1, u_2, \ldots, u_p$ (p étant un entier ≥ 1) sont des objets mathématiques quelconques (par exemple des nombres réels mais éventuellements des fonctions ou des vecteurs...), alors on peut former l'**ensemble** :*

$$E = \{u_1, u_2, \ldots, u_p\}.$$

*On dit alors que chaque u_i (pour $1 \leq i \leq p$) est un **élément** de E, ou que u_i* appartient *à E, et on écrit :*

$$u_i \in E.$$

Si un objet x n'est pas un élément de l'ensemble E, on note $x \notin E$.

Exemple. Certains ensembles sont importants car on les utilise très souvent. On en a déjà introduits certains. Par exemple:

- l'ensemble vide, noté $\emptyset$. Il ne contient aucun élément;
- l'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ des entiers naturels;
- l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels, dont $0, -1, \sqrt{2}, e$ sont des éléments.

Mais on verra également dans les prochains chapitres que d'autres ensembles seront utilisés (et importants) comme

- l'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et m colonnes;
- l'ensemble $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ des fonctions infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$...

Dans les deux chapitres précédents, nous avons étudié les *suites réelles*, on peut alors introduire une notation pour l'ensemble de tels objets. Ainsi, il est courant de noter $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ l'ensemble des suites réelles.

⚠ Il est tout à fait possible de considérer un ensemble d'ensembles, comme

$$E = \{\{1; 2\}; \{1\}; \mathbb{N}\}.$$

Ici, les éléments de E sont eux-mêmes des ensembles. On fera donc attention à bien identifier le contexte dans lequel on se trouve.

☞ *Deux ensembles sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes éléments.*

Remarque 1. L'ordre des éléments dans un ensemble, et leurs éventuelles répétitions n'importent pas. Par exemple:

$$\{1; 2\} = \{2; 1\} = \{1; 1; 2\}.$$

Définition 2. *Le* ***cardinal*** *d'un ensemble E est le nombre d'éléments qui le composent. On le note card(E) ou $\#E$. Il peut être fini ou infini.*

Un ensemble de cardinal 1 s'appelle un ***singleton*** *et un ensemble de cardinal 2 une* ***paire****.*

Définition 3. *Soient E et F deux ensembles. On dit que F est* ***inclus*** *dans E, ce qui s'écrit $F \subset E$, lorsque tout élement de F est aussi un élément de E:*

$$(F \subset E) \iff (\forall x \in F,\ x \in E).$$

Lorsque F est inclus dans E, on dit que F est un ***sous-ensemble*** *(ou une* ***partie****) de E.*

Exercice 1. Écrire, à l'aide de quantificateurs, le fait qu'un ensemble F **ne soit pas inclus** dans un ensemble E.

⚠ **Attention.** L'ensemble vide est un sous-ensemble de tout ensemble.

Exercice 2. Vrai ou Faux?

(i) $\{1, 1\} = \{1\}$
(ii) $2 \in \{\{2\}, 3, \{\{4\}\}, \emptyset\}$
(iii) $\{1\} = \{\{1\}\}$
(iv) $3 \in \emptyset$
(v) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
(vi) $\{1\} \subset \{\{1\}\}$
(vii) $\emptyset \subset \{1\}$
(viii) $\{\{\{3\}\}\}$ a un élément
(ix) $\{n \in \mathbb{N},\ 82 \leq n \leq 99 \text{ et } \exists k \in \mathbb{N},\ n = k^2\} = \emptyset$

✎ **Méthode.** (Inclusion de deux ensembles).

Pour montrer qu'un ensemble A est inclus dans un ensemble B, on fixe un élément quelconque x de A et on montre qu'il appartient aussi à B.

Exercice 3. Montrer que $A \subset B$, où

$$A = \{x \in \mathbb{R} :\ 3 \leq x \leq 4\} \qquad \text{et} \qquad B = \{x \in \mathbb{R} :\ x^3 - x^2 - x - 5 \geq 0\}.$$

Proposition 1. Soient A, B et C trois ensembles. Alors

(i) $$(A \subset B \text{ et } B \subset C) \Longrightarrow (A \subset C).$$

(ii) $$(A \subset B \text{ et } B \subset A) \iff (A = B).$$

La proposition précédente permet en particulier d'établir la méthode suivante, pour montrer que deux ensembles sont égaux.

✎ **Méthode.** (Égalité de deux ensembles)

Pour montrer que deux ensembles A et B sont égaux, on peut procéder comme suit:

- Ou bien on peut écrire **en extension** (c'est à dire en donnant tous leurs éléments) les deux ensembles et on vérifie que ce sont les mêmes;
- Ou bien on procède par **double inclusion**:

$$(A = B) \iff (A \subset B \textbf{ et } B \subset A).$$

C'est à dire qu'on commence par montrer que $A \subset B$ et ensuite, on montre que $B \subset A$.

Remarque 2. (Cardinal et Inclusion)
Il est clair que si $F \subset E$, alors $card(F) \leq card(E)$. On peut en déduire alors le résultat suivant, dont la démonstration est un petit exercice facile (mais instructif): si E et F sont deux ensembles avec un nombre fini d'éléments avec $F \subset E$ et si $card(F) = card(E)$, alors $E = F$.

Définition 4. *Si E est un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$* ***l'ensemble des parties*** *de E. Les éléments de $\mathcal{P}(E)$ sont donc les parties de E.*

Exemple. Prenons $E = \{1; 2\}$. Cet ensemble, qui a deux éléments, admet quatre sous-ensembles qui sont: $\emptyset$ (qui ne contient pas d'élément), $\{1\}$ et $\{2\}$ (qui contiennent tous deux un élément) et E lui-même. Ainsi, on écrira

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset;\ \{1\};\ \{2\};\ \{1; 2\}\}.$$

Exercice 4. Expliciter les ensembles suivants :

(i) $\mathcal{P}(\emptyset)$
(ii) $\mathcal{P}(\{5\})$
(iii) $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$
(iv) $\mathcal{P}(\{\{1\}\})$
(v) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$

1.2 Opérations sur les ensembles

Définition 5. *Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Alors, on peut considérer les éléments de A qui ne sont pas dans B, cet ensemble se note $A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\}$ et se lit "A privé de B".*

Définition 6. *Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$.*

- *On appelle* ***intersection*** *de A et B, et on note $A \cap B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A* ***et*** *à B.*
- *On appelle* ***union*** *de A et B, et on note $A \cup B$, l'ensemble des éléments qui appartiennent à A* ***ou*** *à B.*

Deux ensembles A et B tels que $A \cap B = \emptyset$ sont dits ***disjoints****.*

⚠ **Attention.** Le "*ou*" de la définition de l'union est un "*ou*" **inclusif**. C'est à dire que pour construire $A \cup B$, on prend les éléments qui sont dans A, dans B et aussi ceux qui sont dans les deux! En particulier $A \cap B \subset A \cup B$.

Proposition 2. Soient E un ensemble et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Les propriétés suivantes sont toujours vraies:

(1) ... relatives à l'intersection
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap A = A$ et $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.

(2) ... relatives à l'union
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup A = A$ et $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

(3) ... relatives à intersection et l'union
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Exercice 5. Pour $A, B, C, D \in \mathcal{P}(E)$, simplifier l'expression

$$(A \cap B) \cup (C \cap D).$$

Proposition 3. (Formule du crible) Soient E un ensemble fini et $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$. Alors,

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$$

et

$$card(A\cup B\cup C) = card(A)+card(B)+card(C)-card(A\cap B)-card(B\cap C)-card(C\cap A)+card(A\cap B\cap C).$$

Définition 7. *Soient E et I deux ensembles, et $(A_i)_{i\in I}$ une* ***famille*** *de sous-ensembles de E indexée par I (c'est à dire que, pour tout $i \in I$, $A_i \in \mathcal{P}(E)$). On peut alors construire la réunion et l'intersection de tous les A_i:*

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \Longleftrightarrow \exists i \in I,\ x \in A_i$$

et

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \Longleftrightarrow \forall i \in I,\ x \in A_i.$$

Exemple. Considérons la famille $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}$, définie par $A_n = [-n; n]$ (la famille étant indexée par $\mathbb{N}$, on parlera plutôt de suite d'ensembles). On a par exemple $A_0 = \{0\}$, $A_1 = [-1; 1]$, etc... Il est alors facile de voir que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{0\}.$$

Pour montrer chacune de ces égalités d'ensembles, on procède par double inclusion. Il est clair que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \mathbb{R}$. Prenons maintenant $x \in \mathbb{R}$ et montrons que $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Il suffit de trouver un entier naturel qui soit plus grand que x. Prenons alors $N_x = \lfloor x\rfloor + 1$. On a bien $x \in A_{N_x}$ et donc x est bien dans $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Pour l'autre égalité, il est également clair que $\{0\} = A_0 \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Soit alors $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Cela signifie que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in A_n$ ou encore $-n \leq x \leq n$. La seule possibilité est donc que x soit égal à 0 et donc $x \in \{0\}$.

Exercice 6. Déterminer les intersections et réunions d'ensembles suivants:

$$(i)\ A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star} \left[-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right]; \quad (ii)\ B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star} \left]-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}\right[; \quad (iii)\ C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^\star} \left[\frac{1}{n}; +\infty\right[; \quad (iv)\ \bigcup_{a\in\mathbb{R}^\star} \left]\frac{1}{a}; +\infty\right[.$$

Définition 8. *Soient E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. On appelle* ***complémentaire de** A **dans** E *l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A:*

$$\complement_E(A) = \{x \in E :\ x \notin A\} = E \setminus A.$$

⚠ **Attention.** La notion de complémentaire d'un ensemble A dépend totalement de l'ensemble E. Lorsque le contexte est clair (**et uniquement dans ce cas**), on peut alléger la notation et la terminologie en parlant simplement de complémentaire de A et en le notant $\overline{A}$.

Proposition 4. Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Alors

- $\overline{E} = \emptyset$; $\overline{\emptyset} = E$; $\overline{\overline{A}} = A$.
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$; $A \cup \overline{A} = E$.
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Définition 9. *Soient E un ensemble et $(A_i)_{i\in I}$ une familles de parties non vides de E. On dit que $(A_i)_{i\in I}$ forme une* ***partition*** *de E si:*

$$\begin{cases} \bigcup_{i\in I} A_i = E \\ \forall i \in I, \forall j \in I, \quad (i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \emptyset) \end{cases}$$

Exercice 7. Montrer que la famille (A_n) définie, pour $n \in \mathbb{Z}$ par $A_n = [n; n+1[$ forme une partition de $\mathbb{R}$.

Définition 10. *On appelle* ***produit cartésien*** *de n ensembles $E_1, E_2, \cdots E_n$ l'ensemble des $n-$uplets $(x_1, x_2, ..., x_n)$ tels que $x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2, ...,\ x_n \in E_n$.*

$$E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \in E_i, i = 1, ..., n\}.$$

☞ *Le produit cartésien de n ensembles égaux à E se note simplement E^n.*

Exercice 8. À l'aide d'un dessin, exprimer simplement le produit $[0;2]^2 \cap [1;3]^2$.

2 Applications

2.1 Vocabulaire

La définition suivante a déjà été introduite dans le premier chapitre.

Définition 11. *Une* ***application*** *f est la donnée d'un ensemble E, appelé* ***ensemble de départ****, d'un ensemble F, appelé* ***ensemble d'arrivée****, et pour chaque élément x de E, d'un unique élément noté $f(x)$.*

*On dit que $f(x)$ est l'****image*** *de x par f. De plus, si y est un élément de F et que x est un élément de E qui vérifie $f(x) = y$, alors x est appelé* ***antécédent*** *de y par f.*
Une application f de E dans F se note ainsi:

$$f: \begin{array}{ccc} E & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

Définition 12. *(Application identité)*
Soit E un ensemble. L'application définie sur E et qui à tout élément $x \in E$ associe le même élément x est appelée ***application identité*** *(ou tout simplement* ***identité****) de E. On la note*

$$\mathrm{Id}_E: \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

On introduit également les notations et la terminologie suivante. Il est capital de bien faire la distinction entre élément et ensemble et de manipuler tous les objets avec rigueur (et précaution).

Définition 13. *(Image directe et pré-image)*
Soient f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$.

- *On appelle* ***image directe*** *de A par f l'ensemble des images par f des éléments de A. On note*
$$f(A) = \{y \in F :\ \exists\, x \in A,\ y = f(x)\}.$$
- *On appelle* ***pré-image*** *de B par f l'ensemble des éléments de E dont l'image par f est dans B. On note*
$$f^{-1}(B) = \{x \in E :\ f(x) \in B\}.$$

⚠ **Attention.** Il est capital d'avoir à l'esprit que les ensembles définis ci-dessus sont des ensembles. La notation de la pré-image est une notation et n'a rien à voir avec la bijection réciproque f^{-1} (qui sera définie ci-après) et qui peut tout à fait ne pas exister. On fera de plus bien la différence entre $f(x)$ et $f(\{x\})$ qui ne sont pas des objets du même type!

Exercice 9.

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto e^{2x} + e^x$.
  (a) Déterminer $f(\{0\})$.
  (b) Déterminer $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$.
  (c) Montrer que $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+^\star$. A-t-on égalité? Justifier.
(2) Soit $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ (n, m) \mapsto n(m-1)$.
  (a) Déterminer $g(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ et $g^{-1}(\{0\})$.

Définition 14. *Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux application. La* ***composée*** *de f par g est l'application notée $g \circ f$ définie sur E et à valeurs dans G qui à un élément $x \in E$ associe $g(f(x))$.*

⚠ **Attention.** $f \circ g \neq g \circ f$!

Exercice 10. Dans chacun des cas, expliciter $g \circ f$.

(1) $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{x}$ et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \ln(1+x)$;
(2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x + y$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \mapsto (t, t+1, t^2)$.

2.2 Injections, Surjections, Bijections

Définition 15. *Soit f une application de E dans F. On dit que:*

- *f est* ***injective*** *si tout élément de F possède au plus un antécédent par f:*
$$\forall x_1,\, x_2 \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2.$$
- *f est* ***surjective*** *si tout élément de F possède au moins un antécédent par f:*
$$\forall y \in F,\ \exists\, x \in E\ :\ f(x) = y.$$
- *f est* ***bijective*** *si tout élément F possède un unique antécédent par f:*
$$\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E\ :\ f(x) = y.$$
L'application de F vers E qui à y associe x s'appelle la ***bijection réciproque*** *de f. On la note f^{-1}.*

Remarque 3. On peut, à partir de la définition, remarquer les propriétés suivantes:

(1) L'application identité de tout ensemble E est toujours bijective.
(2) Une application f est bijective si elle est à la fois injective **et** surjective.
(3) Si $f : E \to F$ est bijective alors
$$\forall x \in E,\ \forall y \in F, \qquad (f(x) = y) \Longleftrightarrow (x = f^{-1}(y)).$$
(4) Si f est bijective de E dans F, on dira que f réalise une bijection de E sur F. Il est alors clair que f^{-1} réalise quant à elle une bijection de F sur E. De plus,
$$\left(f^{-1}\right)^{-1} = f.$$
(5) Si $f : E \to F$ est bijective alors
$$f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F \quad \text{et} \quad f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E.$$
(6) Si $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$, on peut dire que f réalise une bijection de A sur B si et seulement si
   (i) $f(A) = B$;
   (ii) tout élément de B possède un unique antécédent x **dans** A.

Exemple. L'exponentielle est la bijection réciproque du logarithme néperien:
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star,\ \forall y \in \mathbb{R}, \qquad (\ln(x) = y) \Longleftrightarrow (x = e^y).$$

✎ **Méthode.** Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est bijective, on peut parfois montrer que tout élément de l'espace d'arrivée possède un unique antécédent par f dans l'ensemble de départ de manière explicite (c'est à dire qu'on choisit $y \in F$ arbitraire et on explicite l'unique x (qui dépendra de y) tel que $f(x) = y$) ou bien (le plus souvent) on montre en deux temps qu'elle est injective et surjective.

- Pour la surjectivité: on prend un élément quelconque y dans l'ensemble d'arrivée et on montre qu'il existe un élément x dans l'ensemble de départ tel que $f(x) = y$.
- Pour l'injectivité: on part de deux éléments quelconques x et y de l'ensemble de départ vérifiant $f(x) = f(y)$ et on montre qu'on a nécessairement $x = y$.

Naturellement, pour infirmer l'une des deux propriétés, on peut fournir un contre-exemple.

Exercice 11. Les applications suivantes sont-elles injectives? surjectives? bijectives? Dans le cas d'une bijection, expliciter la bijection réciproque.

(1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2 - 1$.
(2) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2,\ n \mapsto (n, (n+1)^2)$.
(3) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par

$$h(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\frac{n+1}{2}, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Proposition 5. (Bijections et ensembles finis) Soient E et F deux ensembles finis et f une application de E dans F.

(1) Si f est bijective, alors $card(E) = card(F)$.
(2) Si $card(E) = card(F)$ **et si** f injective, alors f est bijective.
(3) Si $card(E) = card(F)$ **et si** f surjective, alors f est bijective.

Proposition 6. (Composée de bijections) Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux bijections. Alors $g \circ f$ est encore une bijection (de E sur G) et on a

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Autres exercices

Exercice 12. Soient E et F deux ensembles et $(A, B) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$. Montrer, qu'en général,

$$\complement_{E\times F} A \times B \neq \complement_E A \times \complement_F B.$$

Exercice 13. Montrer que les deux ensembles suivants sont égaux et les représenter graphiquement

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x - y = 1\} \quad \text{et} \quad B = \{(t+1, 4t+3) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Exercice 14. (Composition itérée)

Si $f : E \to E$ est une application, on peut composer f avec elle même. En répétant ce processus, on peut le faire n fois. Plus précisément, on note, pour $n \geq 1$

$$f^n = f \circ f \circ \cdots \circ f \quad (n \text{ fois}).$$

(1) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$. Que vaut f^n?
(2) Soit alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x/(x+1)$. Expliciter f^2 puis f^3. Conjecturer puis démontrer, par récurrence, une formule pour f^n.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^\star$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x}}.$$

Montrer que f est bijective et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

Exercice 16. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. Montrer que:

(1) Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
(2) Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

Exercice 17. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longmapsto & x^2(3y - 5) \end{array}$$

L'application est-elle injective? surjective? bijective? Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R}_+^\star)$.

Exercice 18. (DM n°5, Automne 2016) On considère les deux applications

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x^3y^2z^6, x^4y^5z^{12}, x^2y^2z^5) \end{array}$$

et

$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (\ln(x), \ln(y), \ln(z)) . \end{array}$$

(1) Déterminer

$$g\left(\{1\}\times]1;+\infty[\times\mathbb{R}_+^*\right) \qquad \text{et} \qquad g^{-1}\left(\{0;1\}\times]1;+\infty[\times\mathbb{R}_+\right).$$

(2) g est-elle injective? Surjective? Bijective?

(3) Expliciter $(g\circ f)(x,y,z)$ puis déterminer, pour $a,b,c>0$, $(g\circ f)^{-1}\left(\{(a;b;c)\}\right)$. En déduire que $g\circ f$ est bijective puis que f est bijective.

Exercice 19. Soient E un ensemble et A une partie de E telle que $A \notin \{\emptyset; E\}$. On définit l'application f_A par

$$f_A: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \{0;1\} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1, & \text{si } x\in A \\ 0, & \text{si } x\notin A \end{cases} \end{array}$$

(1) L'application f_A est-elle injective? surjective? bijective?

(2) Montrer que $1 - f_A = f_{\overline{A}}$.

(3) Soient B une autre partie de E et f_B la fonction correspondante. Que peut-on dire de f_Af_B?

Exercice 20. (Ensembles, sous-ensembles, opérations). On considère trois parties A, B, C d'un ensemble E.

(1) Montrer que si $A\cup B = B\cap C$, alors $A\subset B\subset C$.

(2) On note ensuite

$$A\Delta B = \{x\in A\cup B:\ x\notin A\cap B\}.$$

(a) Faire un dessin pour représenter $A\Delta B$.

(b) Montrer que

$$A\Delta B = (A\cap \complement_E B)\cup(B\cap\complement_E A).$$

(c) Déterminer $A\Delta A$, $A\Delta\emptyset$, $A\Delta E$ et $A\Delta\complement_E A$.

Exercice 21. (Image directe et pré-image) On considère les trois applications

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}, \qquad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}, \qquad \text{et} \qquad h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y, x-3y) \end{array}.$$

(1) Déterminer $f([-2;1])$ et $f^{-1}([-1;4])$. L'application est-elle injective? surjective? bijective?

(2) Déterminer $g(\mathbb{R})$ et $g^{-1}(]-\infty;0])$. L'application est-elle injective? surjective? bijective?

(3) Déterminer $h^{-1}(\{(0,0)\})$. L'application est-elle injective? Montrer que $h(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^2$.