ECE 1 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 11. (Complément) sur le comportement asymptotique des fonctions réelles

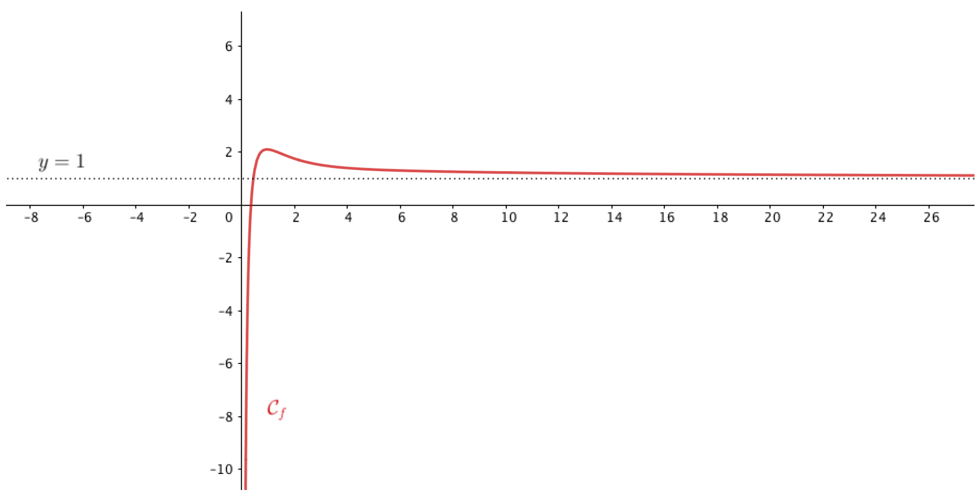
Ce très bref chapitre rappelle quelques interprétations, notamment graphiques, du calcul des limites d'une fonction aux bords de son ensemble de définition.

1 Branches infinies

On sait déjà (enfin on l'espère) que certaines limites peuvent se traduire par la présence d'**asymptotes**.

En effet, si une fonction f a une limite finie en $\pm\infty$ (*i.e.* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a$, avec $a \in \mathbb{R}$), sa courbe représentative admettra une asymptote horizontale $y = a$ en $\pm\infty$.

Par exemple, la courbe représentative de $f: x \mapsto 1 + \frac{\ln(x)}{x} + 3e^{-x}$ présente une asymptote d'équation $y = 1$ en $+\infty$.



Si en revanche, il y a une limite infinie en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ au bord de l'ensemble de définition (*i.e.* $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$), la courbe représentative admettra cette fois une asymptote verticale, d'équation $x = x_0$.

Enfin, plus généralement, s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$, alors la courbe représentative de f admettra, en $\pm\infty$, une **asymptote oblique** d'équation $y = ax + b$.

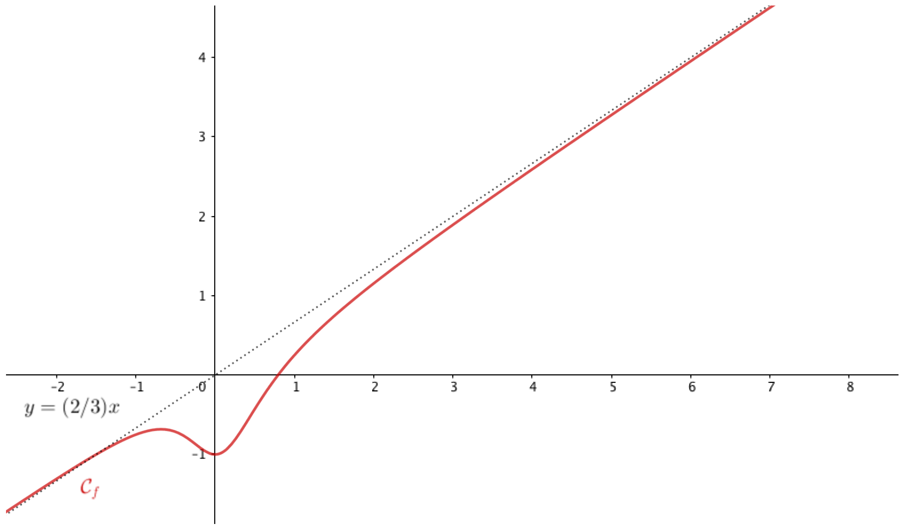
On détermine a et b à l'aide des formules suivantes:

$$a = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{et} \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - ax.$$

On détermine la position relative de la courbe par rapport à une éventuelle asymptote en étudiant le signe de la **différence** des deux expressions correspondantes.

Par exemple, on peut voir que la droite d'équation $y = (2/3)x$ est asymptote oblique (en $+\infty$ et $-\infty$) à la courbe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{3x^2 + 1}.$$



Quand la courbe semble *regarder* dans une direction mais tout en s'en éloignant, on dit que la courbe possède une branche parabolique dont l'axe est donné par la direction que regarde la courbe. Plus précisément,

Définition 1. *On dit que la courbe représentative de f possède une **branche parabolique** en $+\infty$ de direction $y = ax$ (avec $a \neq 0$) si*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = a \qquad \textbf{\textit{et}} \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) - ax = \pm\infty.$$

Si la limite de $f(x) - ax$ est plus l'infini, la courbe regarde l'axe par au-dessus, si la limite est moins l'infini, la courbe regarde l'axe par en dessous.

Naturellement, on peut adapter la définition pour des branches paraboliques en $-\infty$.

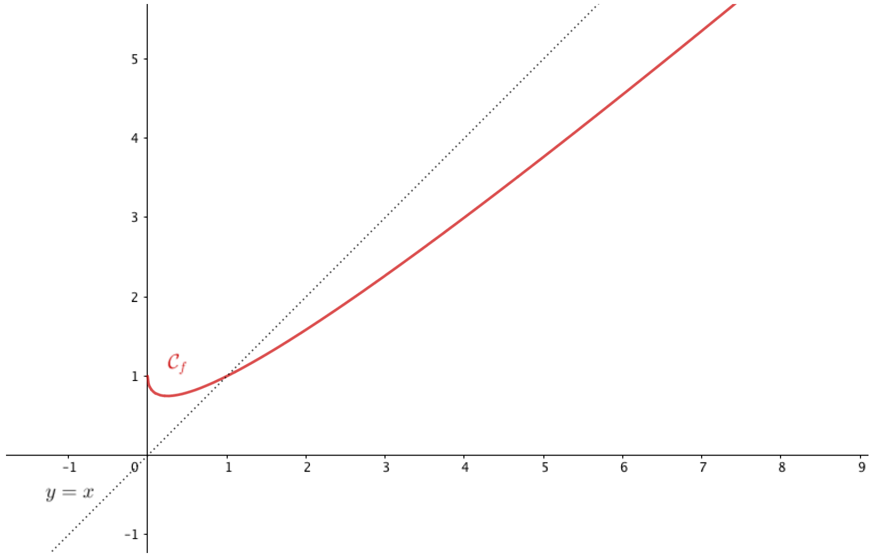
Définition 2. *Si, en revanche, la limite en l'infini du rapport $\frac{f(x)}{x}$ est 0, on dit que la courbe possède une branche parabolique de direction l'axe des abscisses (Ox) (c'est le cas en particulier du logarithme).*

Enfin, si ce même rapport tend vers l'infini, on dit que la courbe possède une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées (Oy) (ce qui est le cas de l'exponentielle).

Par exemple, soit f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x + 1 - \sqrt{x}$. Un rapide calcul de limite montre que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \qquad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = +\infty.$$

On conclut donc que la courbe représentative de f admet une branche parabolique de direction $y = x$ qu'elle *regarde* par au-dessus.



Exercice 1. (Interro n°1, Automne 2016) Étudier la branche en $+\infty$ de la courbe représentative de la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^\star$ par

$$\varphi(x) = \frac{2x^3 - \ln(x^2)}{x^2+1}.$$

Exercice 2. (D'après **EML 2014**) On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\varphi(x) = e^x - xe^{1/x}.$$

Partie I - Étude de la fonction φ

On admet que φ est *dérivable trois fois* sur $\mathbb{R}_+^*$ (ce qui garantie l'existence de φ', dérivée de φ, celle de φ'', dérivée de φ' et celle de φ''', dérivée de φ''). Enfin, on donne l'encadrement $2 < e < 3$.

(1) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi'''(x) = e^x + \frac{3x+1}{x^5}e^{1/x}.$$

(2) Déterminer les variations de φ'' et calculer $\varphi''(1)$.

(3) En déduire les variations de φ' puis, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \varphi'(x) \geq e.$$

(4) En déduire les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(5) Déterminer la valeur de la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures. Donner une interprétation graphique du résultat.

(6) Déterminer les deux limites

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}.$$

Préciser alors la nature de la branche en $+\infty$ de la courbe de φ.

(7) On donne $15 < \varphi(3) < 16$. Montrer que

$$\forall x \geq 3, \qquad \varphi(x) \geq ex.$$

Indication. On pourra poser $\psi(x) = \varphi(x) - ex$ et utiliser la Question (3).

(8) Représenter, sur un graphique orthonormé, la courbe de φ en y faisant apparaître les différents éléments étudiés.

Partie II - Étude de la suite (u_n)

On introduit la suite (u_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par
$$u_0 = 3, \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \varphi(u_n).$$

(8) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et que $u_n \geq 3e^n$.
(9) Montrer que la suite (u_n) est croissante.
(10) Montrer, par l'absurde que (u_n) diverge vers $+\infty$.
(11) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k} \leq \frac{e - e^{-n}}{3(e-1)}.$$
(12) En déduire la nature de la série (S_n) définie par
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}.$$

2 Parité et symétries

Afin de rappeler la notion de parité, nous avons besoin d'introduire celle d'intervalle centré.

Définition 3. *Soient I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. On dit que I est symétrique par rapport à a, si*
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad a + x \in I \Longrightarrow a - x \in I.$$
Dans le cas où I est un intervalle et $a \in I$, cela revient à dire que l'intervalle est centré en a.

Par exemple, $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, mais c'est aussi le cas de $\mathbb{R}^\star$, tout comme de $]-\pi;\pi[$, mais ce n'est pas le cas de $[-8;+\infty[$.

Définition 4. *Soit f une fonction ayant un domaine de définition symétrique par rapport à 0. On dit que:*

- *f est **paire** si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(-x) = f(x)$;*
- *f est **impaire** si, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(-x) = -f(x)$.*

Graphiquement, une fonction paire est **symétrique par rapport à l'axe des ordonnées** alors qu'une fonction impaire est quant à elle **symétrique par rapport à l'origine du repère**.

✎ **Méthode.** Lorsqu'on étudie une fonction, si le domaine est symétrique par rapport à 0 (et uniquement dans ce cas, sinon cela n'a pas de sens), on peut chercher une éventuelle parité en calculant $f(-x)$.

Le cas échéant, cela permet de restreindre l'intervalle d'étude ainsi que le nombre de limites à déterminer. On déduit les informations concernant les valeurs négatives **par symétrie**.

Exercice 3. Déterminer l'ensemble de définition, puis étudier la parité des fonctions suivantes:
(i) $f : x \mapsto x + \ln(1-x) - \ln(x+1)$;
(ii) $g : x \mapsto x\frac{e^x-1}{e^x+1}$;

L'exercice suivant est un classique, dont la résolution est très instructive. On recommande vivement de s'y pencher.

Exercice 4. (Extrait de **EML 2016**) Montrer que la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ est paire
$$f(t) = \frac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}.$$

☞ Connaître une éventuelle parité pour une fonction f permet aussi de déterminer la limite en l'opposé d'un point où on la connait déjà. Plus précisément, soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ à l'extrémité du domaine de définition de f (symétrique par rapport à 0)

(i) Si f est paire, alors
$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to -a} f(x).$$

(ii) Si f est impaire, alors
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\lim_{x\to -a} f(x).$$

2.1 Autres axes ou centres de symétrie

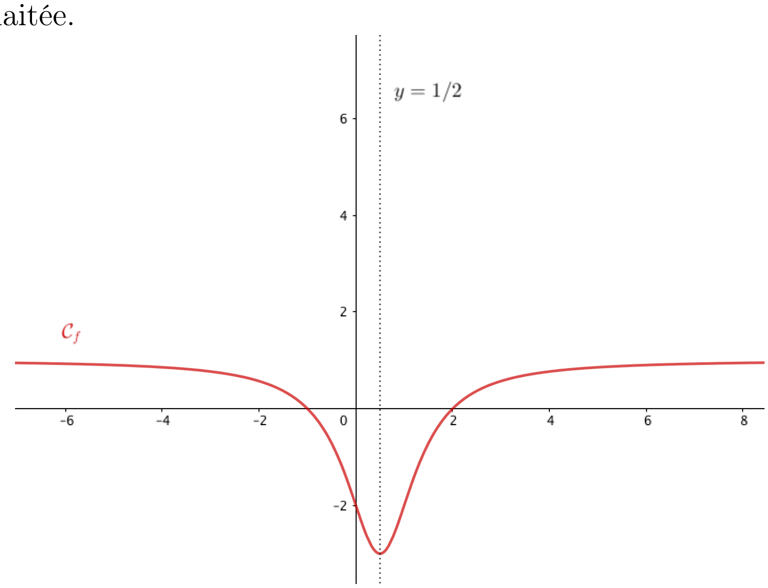
On peut généraliser ces propriétés de symétrie de la courbe de f à d'autres axes ou d'autres centres de symétrie. Plus précisément,

Proposition 1. (Axe de symétrie) Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est symétrique par rapport à a. La courbe de f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = a$ si, pour tout x tel que $a + x \in \mathcal{D}_f$, on a
$$f(a+x) = f(a-x).$$

La propriété précédente est équivalente au fait que la fonction $x \mapsto f(a+x)$ est paire.

Exemple. On considère la fonction f définie par
$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1}.$$
On va montrer que sa courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$.

Une rapide étude du dénominateur nous permet d'établir que $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ qui est en particulier symétrique par rapport à $\frac{1}{2}$. On calcule alors
$$f\left(\frac{1}{2}+x\right) = \frac{(\frac{1}{2}+x)^2 - (\frac{1}{2}+x) - 2}{(\frac{1}{2}+x)^2 - (\frac{1}{2}+x) + 1} = \frac{\frac{1}{4} + x + x^2 - \frac{1}{2} - x - 2}{\frac{1}{4} + x + x^2 - \frac{1}{2} - x + 1} = \frac{x^2 - \frac{9}{4}}{x^2 + \frac{3}{4}}.$$
On constate alors que la fonction $x \mapsto f\left(\frac{1}{2}+x\right)$ est bien paire (elle ne dépend que de x^2). Ainsi, on a bien la conclusion souhaitée.



Exercice 5. Dans chaque cas, montrer que la courbe représentative de f admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = a$ avec:

(i) $f : x \mapsto x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)$ et $a = \frac{1}{2}$;
(ii) $f : x \mapsto \ln|x^2 + x - 2|$ et $a = -\frac{1}{2}$.

Proposition 2. (Centre de symétrie) Soient f une fonction dont l'ensemble de définition est symétrique par rapport à x_I. La courbe de f est symétrique par rapport au point $I(x_I; y_I)$ si, pour tout x tel que $x_I + x \in \mathcal{D}_f$, on a
$$f(x_I + x) = -f(x_I - x) + 2y_I.$$

La propriété précédente est équivalente au fait que la fonction $x \mapsto f(x_I + x) - y_I$ est impaire.

Exemple. On considère la fonction f définie par

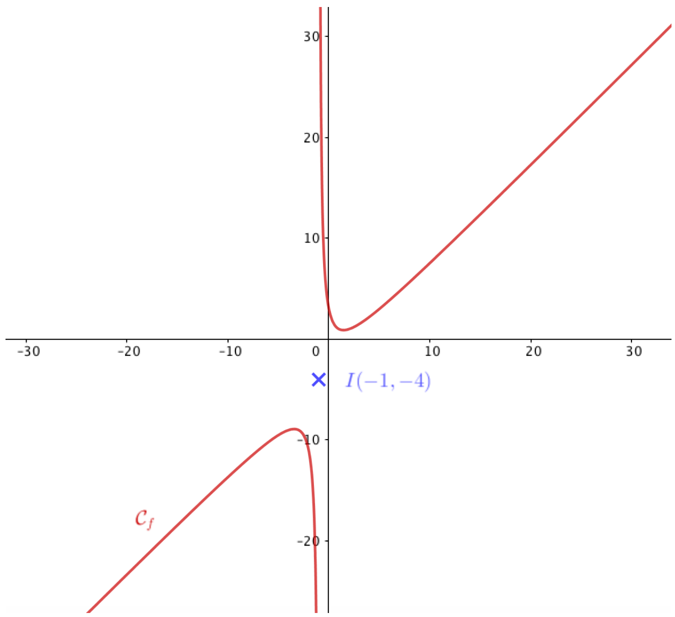
$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 1}.$$

On va montrer que sa courbe est symétrique par rapport au point $I(-1; -4)$.

Ici, l'ensemble de définition est clairement $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ qui est bien symétrique par rapport à -1. On calcule alors (pour $x \neq 0$)

$$f(-1+x) - (-4) = \frac{(-1+x)^2 - 2(-1+x) + 3}{(-1+x)+1} + 4 = \frac{x^2 - 4x + 6}{x} + \frac{4x}{x} = \frac{x^2+6}{x},$$

qui est bien l'expression d'une fonction impaire. On a donc bien la conclusion souhaitée.



Exercice 6. Dans chaque cas, montrer que la courbe représentative de f admet pour centre de symétrie le point J avec:

$$(i)\ f : x \mapsto \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1}, \quad (\text{ avec } J = (0;1)), \qquad (ii)\ f : x \mapsto \frac{1-2x}{x^2-x-2}, \quad \left(\text{avec } J = \left(\frac{1}{2}; 0\right)\right).$$

Exercice 7. Déterminer l'ensemble de définition, puis toutes les asymptotes ou branches infinies des fonctions suivantes, et tracer une allure de leur courbe représentative (on essaiera d'étudier les variations également quand c'est possible)

$$(i)\ f_1(x) = \frac{x^2 + x\ln(x)}{x+1}, \qquad (ii)\ f_2(x) = \ln(e^x + e^{-x}), \qquad (iii)\ f_3(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x-1}}.$$