ECE 1 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

# Programme de colles

*Quinzaine du 28/01 au 08/02*

Les questions de cours sont des énoncés du cours ou des exercices ultra-classiques à savoir refaire, non pas "par coeur" mais avec une compréhension totale et sans hésitation. Il sera nécessairement posé (au moins) une question de cours à chaque élève.

## Semaine du 28 Janvier

### Programme

- Limites des suites. *Intégralité du chapitre.* Tout le monde devra savoir - et aura à - étudier une suite récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Matrices. *Inversibilité.* Tout le monde aura une matrice à inverser par pivot de Gauss simultané.

### Questions de cours

- (`SciLab`) Écrire un programme qui demande à l'utilisateur de rentrer un nombre $A \geq 0$, calcule et affiche le plus petit entier $N$ tel que $u_N \geq A$, où la suite $(u_n)$ est définie par
$$u_0 = 2, \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \exp(u_n) - e\ln(u_n).$$
- Énoncés des théorèmes de convergence (comparaison, gendarmes, convergence monotone).
- Définition et théorème des suites adjacentes (et la preuve).
- Montrer que la suite $(u_n)$ définie par $u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}$ et $u_0 = 1$ converge vers 1.
- Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $B^2 + B$ et déduire que $B$ n'est pas inversible.

### Suggestion d'exercices

(1) On considère la suite $(u_n)$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par
$$\begin{cases} u_0 & = & 1/2 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{u_n^2}{3u_n+1} \end{cases}$$
(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ est bien défini et que $u_n > 0$.
(b) Étudier la monotonie de $(u_n)$.
(c) Que peut-on dire quant à la convergence de la suite?
(d) Écrire un programme `SciLab` permettant de calculer $u_n$ pour une valeur arbitraire de $n$ entrée par l'utilisateur.

(2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *nilpotente*, c'est à dire pour laquelle il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.
(a) Calculer $(I_n - A)(I_n + A + A^2 + ... + A^{p-1})$.
(b) En déduire que $I_n - A$ est inversible et préciser son inverse.

# Semaine du 04 Février

### Programme

- Limites des suites. *Intégralité du chapitre.* Tout le monde devra savoir - et aura à - étudier une suite récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Matrices. *Inversibilité.* Tout le monde aura une matrice à inverser par pivot de Gauss simultané.
- Branches infinies des courbes de fonctions réelles.
- Injections, surjections, bijections: définitions.

### Questions de cours

- Montrer que la suite $(u_n)$ définie par $u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}$ et $u_0 = 1$ converge vers 1.
- Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $B^2 + B$ et déduire que $B$ n'est pas inversible.
- Dessiner (avec une belle touche artistique) des *patates* illustrant les définitions d'application
  - injective mais pas surjective;
  - surjective mais pas injective;
  - ni injective, ni surjective;
  - bijective
- Nature de la branche infinie de la courbe représentative de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{2x^2 - \ln(x) + 1}{1 + x}, \qquad x \in \mathbb{R}_+^*.$$