ECE 1 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

---

# Chapitre 13. Continuité des fonctions réelles d'une variable réelle

Ce chapitre présente, en plus de résultats bien connus mais énoncés ici avec rigueur, les outils nécessaires à l'étude *qualitative* des fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle, ainsi que des applications importantes (notamment pour l'étude des suites récurrentes ou implicites). Dans tout le chapitre, on considère un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et une fonction $f: I \to \mathbb{R}$.

## 1 Continuité

### 1.1 Continuité en un point

**Définition 1.** *Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f$ une fonction définie au voisinage de $x_0$. On dit que $f$ est **continue** en $x_0$ si $f$ est définie en $x_0$ et $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

☞ Si $f$ n'est pas continue en $x_0$, on dit que $f$ est **discontinue** en $x_0$ ou que $x_0$ est un **point de discontinuité** de $f$.

**Définition 2.** *Sous les même hypothèses que précédemment :*

- *On dit que $f$ est **continue à gauche** en $x_0$ si et seulement si $f$ est définie en $x_0$ et $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$.*
- *On dit que $f$ est **continue à droite** en $x_0$ si et seulement si $f$ est définie en $x_0$ et $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.*

**Proposition 1.** Soient $f: I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$.

(1) Si $x_0$ n'est pas une extrémité de $I$, alors on a l'équivalence :
$f$ est continue en $x_0$ si et seulement si $f$ est continue à gauche et à droite en $x_0$.
(2) Si $x_0$ est l'extrémité gauche (resp. droite) de $I$, alors on a l'équivalence :
$f$ est continue en $x_0$ si et seulement si $f$ est continue à droite (resp. à gauche) en $x_0$.

**Exercice 1.**

(1) Étudier la continuité en 3 de la fonction $f$ définie par :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} & \text{si } x \in [0,3[\cup]3,+\infty[ \\ \frac{1}{4} & \text{si } x = 3 \end{cases} \end{array}$$

(2) Étudier la continuité en 0 de la fonction $f$ définie par :

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{array}$$

**Définition 3.** *Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $x_0 \in I$ et soit $f$ définie sur $I \backslash \{x_0\}$. On dit que $f$ est **prolongeable par continuité** en $x_0$ lorsque $f$ admet une limite finie en $x_0$. L'application*

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccl} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & si \quad x \neq x_0 \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) & si \quad x = x_0 \end{cases} \end{array}$$

*est appelée le **prolongement par continuité** de $f$ en $x_0$.*

**Remarque 1.**

- La fonction $\tilde{f}$ est évidemment continue en $x_0$
- Par abus de notation, la fonction $\tilde{f}$ est parfois notée $f$.
- On définit de même la notion de prolongement à gauche et à droite.

**Exercice 2.**

(1) La fonction $f : \mathbb{R}^\star \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \dfrac{e^x - 1}{x}$ est-elle prolongeable par continuité en 0?
(2) La fonction $g : ]0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x \ln(x)$ est-elle prolongeable par continuité en 0?
(3) La fonction $h : \mathbb{R}^\star \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x \left\lfloor \dfrac{1}{x} \right\rfloor$ est-elle prolongeable par continuité en 0?

### 1.2 Continuité et limite des suites

La continuité d'une fonction en un point, précédemment définie à l'aide des quantificateurs, peut se reformuler à l'aide des suites. Dire qu'on se rapproche arbitrairement de $a$ peut se faire à l'aide d'une suite dont la limite est $a$. Plus précisément, on a le résultat suivant:

**Théorème 1** (Caractérisation séquentielle de la continuité)**.**
*Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $a$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

*(i) $f$ est continue en $a$;*
*(ii) Pour toute suite numérique $(a_n)$ (dont les termes appartiennent au voisinage de $a$ à partir d'un certain rang) qui converge vers $a$, on a que la suite $(f(a_n))$ converge vers $f(a)$.*

**Exercice 3.** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et périodique admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que $f$ est constante.

### 1.3 Continuité sur un intervalle. Opérations sur les fonctions continues

**Définition 4.** *On dit qu'une fonction $f$ est continue sur l'intervalle $I$ si $f$ est continue en tout point de $I$.*

**Proposition 2** (Opérations sur les fonctions continues)**.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies au voisinage d'un point $x_0$, élément d'un intervalle $I$.

(1) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $f$ et $g$ sont continues en $x_0$ (resp. sur $I$), alors $f + g$, $f \times g$ et $\lambda f$ sont continues en $x_0$ (resp. sur $I$);
(2) Si $f$ et $g$ sont continues en $x_0$ et que $g(x_0) \neq 0$ (resp. continues sur $I$ et que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$), alors $1/g$ et $f/g$ sont continues en $x_0$ (resp. sur $I$).
(3) Si $f$ est continue en $x_0$ et que $g$ est (définie au voisinage de et) continue en $f(x_0)$, alors, $g \circ f$ est continue en $x_0$.

Le dernier point de la proposition précédente est un cas particulier du résultat plus général suivant:

**Proposition 3.** Si $f$ est continue sur un intervalle $I$ et si $g$ est continue sur un intervalle $J$ tel que $f(I) \subset J$, alors $g \circ f$ est continue sur $I$.

*Exemple.* La fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+x^2) \end{array}$$

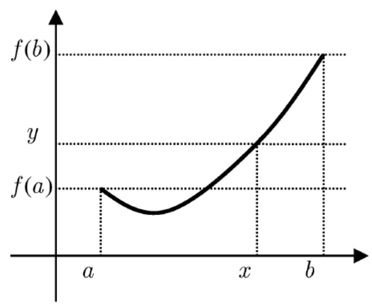
est continue sur $\mathbb{R}$.

### 1.4 Image d'un intervalle par une fonction continue

**Théorème 2** (Théorème des valeurs intermédiaires)**.**

*Soient $a$ et $b$ des réels tels que $a < b$ et $f : [a;b] \to \mathbb{R}$.*

*Si $f$ est continue sur l'intervalle $[a;b]$, alors pour tout réel $y$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $x \in [a;b]$ tel que $f(x) = y$.*




☞ L'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a;b]$.

**Corollaire 1.** L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle; si $f$ est continue sur un intervalle $I$, alors $f(I)$ est un intervalle.

⚠ **Attention.** Les intervalles $I$ et $f(I)$ ne sont pas nécessairement de même nature. Par exemple, si $f$ est la fonction définie par $f(x) = 1/(1+x^2)$, alors $f(\mathbb{R}) = ]0;1]$.

**Proposition 4.**

(1) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Si $f$ est continue sur $[a;b]$ telle que $f(a) \times f(b) \leqslant 0$ alors $f$ s'annule au moins une fois sur $[a;b]$.

(2) Toute fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

☞ Ce résultat est à la base du principe de *dichotomie* que nous utiliserons avec `SciLab` pour trouver des approximations de solutions de $f(x) = 0$.

**Exercice 4.** Montrer que l'équation $xe^x = 1$ admet (au moins) une solution dans l'intervalle $[0;1]$.

On a vu que, de manière générale, la continuité ne préservait pas la nature d'un intervalle. Si cet intervalle est fermé borné, c'est par contre le cas.
Un **segment** est un intervalle fermé borné, c'est à dire un intervalle de la forme $[a;b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

**Proposition 5.** L'image d'un segment par une fonction continue est un segment; si $f$ est continue sur un segment $[a;b]$, alors $f([a;b]) = [m;M]$ est un segment.

⚠ Les extrémités du segment image ne sont pas forcément les images des extrémités de $[a;b]$.

**Proposition 6.**

(1) Si $f$ est une fonction continue et croissante sur un segment $[a,b]$, alors $f([a,b]) = [f(a), f(b)]$.

(2) Si $f$ est une fonction continue et décroissante sur $[a,b]$, alors $f([a,b]) = [f(b), f(a)]$.

☞ Dans la Proposition 5, $m$ est le minimum de la fonction sur $[a;b]$ et $M$ son maximum. On note

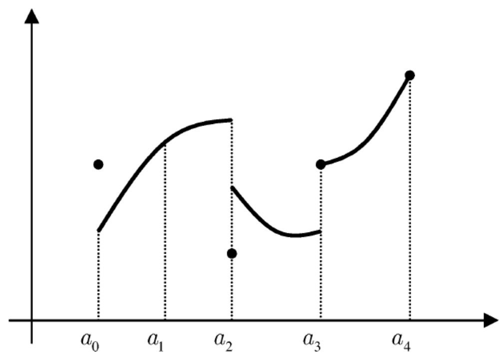
$$m = \min_{[a;b]} f \quad \text{et} \quad M = \max_{[a;b]} f.$$

**Théorème 3.** *Soit $f$ une fonction continue sur un segment $[a, b]$, alors $f$ est bornée sur $[a, b]$ et atteint ses bornes.*

### 1.5 Fonctions continues par morceaux

**Définition 5.** *Une fonction $f$ est dite morceaux sur le segment $[a; b]$ si il existe une subdivision $a_0 = a < a_1 < ... < a_n = b$ telle que la restriction de $f$ à chaque intervalle ouvert $]a_i; a_{i+1}[$ admette un prolongement continu à l'intervalle fermé $[a_i; a_{i+1}]$. Plus précisément, si*

- *$f$ est continue sur chaque $]a_i; a_{i+1}[$;*
- *$f$ admet une limite à droite et à gauche (non nécessairement égales et potentiellement distinctes de la valeur de $f$) en chaque $a_i$.*




☞ Les fonctions "en escalier" (et notamment la fonction partie entière) sont des fonctions continues par morceaux.

**Proposition 7.** Soient $f, g : [a; b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues par morceaux et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, $\lambda f$, $f + g$, $fg$ et $|f|$ sont continues par morceaux.

**Exercice 5.** Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ continue par morceaux. Montrer que $f$ est bornée sur $[a; b]$.

### 1.6 Théorème de la bijection

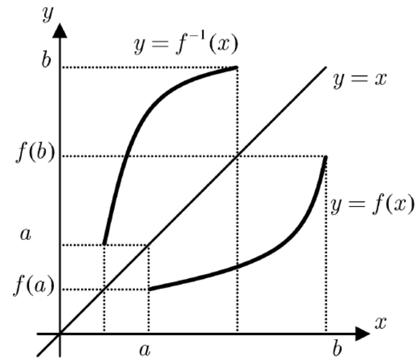
**Proposition 8.** Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a < b$.
Si la fonction $f$ est continue et strictement monotone sur $[a, b]$, alors pour tout réel $k$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = k$.
Autrement dit, l'équation $f(x) = k$ d'inconnue $x$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a, b]$.

**Exercice 6.** Montrer que l'équation $x^3 + x = 3$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $[1, 2]$.

**Théorème 4** (de la bijection).
*Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f$ une application* ***continue*** *et* ***strictement monotone*** *sur $I$. Alors, $f$ réalise une bijection de $I$ sur son image $f(I)$. En particulier,*

- *$f(I)$ est un intervalle, noté $J$*
- *$f : I \to J$ est une bijection de $I$ sur $J$*
- *$f^{-1} : J \to I$ est strictement monotone, de même monotonie que $f$.*
- *$f^{-1} : J \to I$ est continue de $J$ sur $I$.*

☞ Les graphes de $f$ et $f^{-1}$ sont **symétriques** par rapport à la droite d'équation $\Delta : y = x$.




**Exercice 7.** Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{2x^2}{1+x}$$

(1) Démontrez que $f$ réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle $J$ que vous expliciterez.
(2) Soit $g : J \to [0, +\infty[$ l'application réciproque de $f$. Dressez le tableau de variation de $g$ en précisant les limites de $g$ aux bornes de $J$.
(3) Etudiez la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}$.

## 2 Principe de dichotomie

La méthode de **dichotomie** est, en mathématiques, un algorithme de recherche d'un zéro d'une fonction qui consiste à répéter des partages d'un intervalle en deux parties puis à sélectionner le sous-intervalle dans lequel existe un zéro de la fonction.

Ainsi, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, on sait qu'il existe au moins une solution à $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[a; b]$ mais on ne sait pas où. La méthode de dichotomie consiste à diviser l'intervalle en deux en calculant le milieu

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

Il y a maintenant deux possibilités :

- Ou bien $f(a)$ et $f(c)$ sont de signes contraires et la solution cherchée est donc dans l'intervalle $[a; c]$;
- Ou bien cela se passe entre $c$ et $b$.

Pour obtenir une valeur approchée de $\alpha$ à $\epsilon$ près, on construit donc une suite d'intervalles $[a_n; b_n]$ dont la longueur est divisée par deux à chaque étape et qui contiennent tous $\alpha$. Quand la longueur de l'intervalle $[a_n; b_n]$ est plus petite que $\epsilon$, on s'arrête et le milieu de l'intervalle fournit alors une valeur approchée de $\alpha$ à $\epsilon$ près.

On part du principe que ni $a$ ni $b$ n'est solution de l'équation...

Plus précisément, on construit trois suites $(a_n)$, $(b_n)$ et $(c_n)$ selon le procédé suivant:

$$\begin{cases} a_0 &= a \\ b_0 &= b \\ c_0 &= \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

Puis, supposant $a_n, b_n$ et $c_n$ construits, on définit les termes successifs de la manière suivante:

- Si $f(a_n)f(c_n) = 0$, alors $\alpha = c_n$;
- Si $f(a_n)f(c_n) < 0$, alors $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$;
- Si $f(a_n)f(c_n) > 0$, alors $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.

Enfin,

$$c_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}.$$

(1) Que vaut $b_n - a_n$? En déduire que pour toute précision (arbitrairement petite) $\epsilon > 0$, il existe un rang $n$ pour lequel la longueur de l'intervalle contenant $\alpha$ est plus petite que $\epsilon$.

(2) Écrire une fonction `dichotomie()` prenant en argument une fonction $f$, les extrémités $a$ et $b$ de l'intervalle de recherche et la précision $\epsilon$ et renvoyant une valeur approchée à $\epsilon$ près de $\alpha$.

(3) Utiliser le programme pour déterminer une valeur approchée à $10^{-4}$ près de la solution de l'équation

$$x + \ln(x) = 2.$$

# 3 Étude des suites implicites

Comme on l'a vu au cours du Chapitre 3 (et dans quelques exercices), une suite peut être définie implicitement, c'est à dire comme solution d'une certaine équation. Le théorème de la bijection permet d'étudier (et d'assurer l'existence des termes) de telles suites.

☞ Il est capital de retenir que pour obtenir des encadrement (notamment pour la monotonie) sur les termes d'une suite implicite $(u_n)$ de la forme $f(u_n) = a_n$, on obtient des encadrements sur les images et on revient ensuite aux antécédents en utilisant le sens de variations de $f^{-1}$.

**Exercice 8.** (D'après **ECRICOME 1996**)

On considère l'équation $(E_n)$ : $\ln(x) + x = n$ et la fonction $f : x \mapsto \ln(x) + x$.

(1) Montrer que $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ sur $\mathbb{R}$.

(2) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $(E_n)$ admet une unique solution $x_n$. Montrer alors que la suite $(x_n)$ est strictement croissante.

(3) (a) Montrer que, pour tout $x > 0$, $\ln(x) < x$.
   (b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $\frac{n}{2} \leq x_n \leq n$.
   (c) En déduire la limite de la suite $(x_n)$.

(4) Montrer que $\frac{\ln(x_n)}{n} \longrightarrow 0$, $n \to +\infty$. En déduire que $\frac{x_n}{n} \longrightarrow 1$, $n \to +\infty$.

# 4 Autres exercices

**Exercice 9.** (DM 7, Hiver 2018) On considère la fonction $g$ définie par

$$g(x) = \frac{1}{\ln|x|}.$$

(1) Quel est l'ensemble de définition de $g$?

(2) Peut-on prolonger $g$ par continuité?

**Exercice 10.** (DM 11, Hiver 2016)

(1) Discuter en fonction des paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ si la fonction $f$ suivante, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, se prolonge à $\mathbb{R}$ tout entier.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{a(e^{x-1} - 1)}{x - 1}, & \text{si } x < 1 \\[2ex] \dfrac{\sqrt{6x-5} - b}{x - 1}, & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

(2) Soient $a, b > 0$. Étudier et déterminer, si elles existent, les limites en 0 des fonctions

$$x \mapsto \frac{x}{a}\lfloor\frac{b}{x}\rfloor, \qquad x \mapsto \lfloor\frac{x}{a}\rfloor\frac{b}{x}.$$

**Exercice 11.** Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, minorée par 1 et majorée par 2. Étudier

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}; \qquad \lim_{x\to\pm\infty} xf(x); \qquad \lim_{x\to 0} xf(x).$$

**Exercice 12.** Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$.

(1) Étudier la continuité de $f$ en 0.
(2) Montrer que $f(x+1) = f(x) + 1$.
(3) En déduire que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

**Exercice 13.** Soit $f : [0;1] \to [0;1]$ une fonction continue. Montrer que $f$ admet au moins un point fixe.

**Exercice 14.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

**Exercice 15.** Soit $f$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$, continue en 0 et vérifiant:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Après avoir montré que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(x/2^n)$, montrer que $f$ est constante.

**Exercice 16.** Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = x - 2 + \ln(x)$.

(1) Montrer que $f$ définit une bijection de $\mathbb{R}_+^\star$ sur un intervalle à déterminer.
(2) Montrer que la bijection réciproque $f^{-1}$ de $f$ vérifie $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f^{-1}(x)}{x} = 1$.

**Exercice 17.** Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $f(0) = f(1)$.

(1) On veut montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, l'équation $f(x + \frac{1}{n}) = f(x)$ admet au moins une solution. Soit $n \geq 1$. On pose, pour $x \in [0; 1 - \frac{1}{n}]$, $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$.
   (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$.
   (b) Conclure.

(2) *Application.* Un cycliste parcourt 20 km en une heure.
   (a) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée une demi-heure pendant lequel il a parcouru 10 km.
   (b) Montrer qu'il existe au moins un intervalle de temps de durée 3 min pendant lequel il a parcouru 1 km.

**Exercice 18.** (Extrait du DM n°9, Hiver 2017) **Une fonction nulle part continue**.

On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(1) En considérant la suite $a_n = \sqrt{2}/n$ et à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que $f$ n'est pas continue en 0.
(2) Adapter le raisonnement pour montrer que $f$ n'est continue en aucun point rationnel.
(3) Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
   (a) Montrer que la suite $x_n = \lfloor nx \rfloor / n$ a pour limite $x$ et que tous les termes sont rationnels.
   (b) En déduire que $f$ n'est pas continue en $x$.

(Remarque: on a donc montré que la fonction $f$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.)

**Exercice 19.** (Extrait **ECRICOME 2001**, DM 12 Hiver 2016)

On désigne par $n$ un entier naturel non nul et $a$ un réel strictement positif.

On se propose d'étudier les racines de l'équation :

$$(E_n)\ :\ \frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\ldots+\frac{1}{x+2n}=a$$

À cet effet, on introduit la fonction $f_n$, de la variable réelle $x$ définie par :

$$f_n(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\cdots+\frac{1}{x+2n}-a=\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{x+k}-a.$$

(1) **Étude d'un cas particulier.** Pour cette question seulement, on prend $a=\dfrac{11}{6}$ et $n=1$.
 (a) Expliciter $f_1$ et dresser son tableau de variations.
 (b) Calculer $f_1(1)$, puis déterminer les racines de $(E_1)$, après avoir écrit l'expression de $f_1$ sous la forme d'une fraction dont on aura factorisé le dénominateur.

(2) **Dénombrement des racines de** $(E_n)$**.**
 (a) Dresser le tableau de variations de $f_n$.
 (b) Justifier l'existence de racines de l'équation $(E_n)$ et en déterminer le nombre.

(3) **La plus grande des racines.** On note $x_n$ la plus grande des racines de $(E_n)$.
 (a) Justifier que $x_n>0$.
 (b) Démontrer que pour tout réel $x>1$

$$\frac{1}{x}<\ln\frac{x}{x-1}<\frac{1}{x-1}.$$

 (c) À l'aide de la question précédente, montrer que pour tout $x>0$, on a

$$f_n(x)-\frac{1}{x}+a<\ln\left(1+\frac{2n}{x}\right)<f_n(x)-\frac{1}{x+2n}+a$$

 puis, que

$$a-\frac{1}{x_n}<\ln\left(1+\frac{2n}{x_n}\right)<a-\frac{1}{x_n+2n}.$$

 (d) En utilisant l'inégalité de droite, montrer que pour tout $n$ entier naturel non nul, on a

$$x_n>\frac{2n}{\exp a-1}.$$

 (e) Quelle est la limite de $x_n$, puis la limite de $\ln\left(1+\dfrac{2n}{x_n}\right)$, lorsque $n$ tend vers $+\infty$ ?
 (f) En déduire que le quotient de $x_n$ par $\dfrac{2n}{e^a-1}$ tend vers 1 lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 20.** (D'après **EDHEC 1997**, DS 3 Hiver 2016)

Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 3. On considère la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par

$$f_n(x)=x-n\ln(x).$$

(1) **Étude de** $f_n$.
 (a) Étudier $f_n$ et dresser son tableau de variations.
 (b) Montrer qu'il existe deux réels $u_n$ et $v_n$, seules solutions de $f_n(x)=0$, et tels que

$$0<u_n<n<v_n.$$

(2) **Étude de** $(u_n)_{n\geq 3}$.
 (a) Montrer que, pour tout entier $n\geq 3$, $1<u_n<e$.
 (b) Montrer que $f_n(u_{n+1})=\ln(u_{n+1})$ et en déduire que $(u_n)$ est décroissante.
 (c) Justifier que $(u_n)$ converge et, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, déterminer sa limite.

(d) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(u_n)}{u_n-1}=1,\quad \text{puis que}\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{u_n-1}{1/n}=1.$$

(3) **Étude de** $(v_n)_{n\geq 3}$.

(a) Déterminer la limite de $(v_n)$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.

(b) Calculer $f_n(n\ln(n))$. En déduire que, pour tout $n\geq 3$, $n\ln(n)<v_n$.

(c) On introduit la fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}_+^\star$ par $g(x)=x-2\ln(x)$. Étudier $g$ et donner son signe. En déduire que, pour tout entier $n\geq 3$, $2\ln(n)<n$.

(d) En déduire le signe de $f_n(2n\ln(n))$ puis établir que, pour tout $n\geq 3$, $v_n<2n\ln(n)$.

(e) À l'aide des questions précédentes, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(v_n)}{\ln(n)}=1.$$

**Exercice 21.** (D'après **ESCP 1998**, DS 3 Hiver 2016)
Dans tout l'exercice, $n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

(1) (a) Étudier, suivant la parité de $n$, le tableau de variations de la fonction $f_n$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x)=x^{n+1}+x^n.$$

(b) Montrer que dans tous les cas

$$f_n\left(-\frac{n}{n+1}\right)<2.$$

(c) Calculer $f_n(1)$ et en déduire, suivant la parité de $n$, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue $x$

$$x^{n+1}+x^n=2.$$

(2) On introduit les deux matrices $A$ et $D$ définies par

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad D=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}.$$

(a) Déterminer une matrice $P$ telle que $AP=PD$, où $P$ de la forme $P=\begin{pmatrix}1&1\\x&y\end{pmatrix}$.

(b) Montrer que $P$ est inversible et en déduire $D$ en fonction de $A$, $P$ et $P^{-1}$.

(3) On considère l'équation matricielle d'inconnue $X$ matrice carrée de taille 2

$$(E_n)\quad X^{n+1}+X^n=A.$$

(a) En posant $Y=P^{-1}XP$, montrer que $X$ solution de $(E_n)$ est équivalent à $Y$ solution de

$$(E_n')\quad Y^{n+1}+Y^n=D.$$

(b) Soit $Y$ une solution de $(E_n')$. On pose

$$Y=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}.$$

(i) Montrer que, si $Y$ solution de $(E_n')$, alors $Y$ et $D$ commutent.
(ii) En déduire que $b=c=0$.
(iii) Quelle sont les valeurs possibles de $a$?
(iv) Discuter, suivant les valeurs de $n$, le nombre de solutions de l'équation $(E_n)$.

(c) On note $\alpha$ la solution négative de l'équation numérique $x^4+x^3=2$. Déterminer les solutions de l'équation $(E_3)$ à l'aide de $\alpha$.

**Exercice 22.** (Extrait du DS n°3, Hiver 2017, d'après **EDHEC 2009**)

On considère la fonction $f$ définie sur $]-\infty;1[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(1) Montrer que $f$ est continue sur $]-\infty;1[$ et préciser ses limites aux bords de ce même intervalle.

(2) (a) Étudier le signe de la quantité $\ln(1-x)+x$ et en déduire les variations de $f$.
(b) Justifier alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $u_n \in [0;1[$ tel que $f(u_n) = n$. Préciser la valeur de $u_1$.

(3) Montrer que la suite $(u_n)$ converge et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

(4) Compléter les zones en pointillés pour que le script suivant (sous `SciLab`) affiche une valeur approchée de $u_n$ à 0.001 près, où $n$ est choisi par l'utilisateur:

```
function y=f(x)
    if x==0 then
        .................................
    else
        .................................
    end
endfunction

n=input('n=?');

function y=g(x)
    y=f(x)-n;
endfunction

a=0.5;
b=0.999;
b=(a+b)/2;
while abs(b-a)>0.001
    if ................................ then
        b=c;
    else
       ...................................
    end
    c=...................................
end
disp(................)
```