# Chapitre 10. Matrices, le retour

Ce Chapitre complète le premier chapitre sur les matrices, notamment en introduisant la notion de *Polynôme de matrice* et surtout de *matrice inversible.*

Dans tout le chapitre, on note $I_n$ la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $0_n$ la matrice nulle.

## 1 Puissances de matrice

**Définition 1.** *Soient $k \in \mathbb{N}$ et $A$ une matrice* ***carrée*** *de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On appelle* ***puissance*** *$k$-ième de $A$, et on note $A^k$, la matrice*

$$A^0 = \mathrm{Id}_n \quad \textit{et} \quad A^k = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{k \textit{ fois}}.$$

☞ Toute puissance de la matrice identité est encore égale à l'identité:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, \quad I_n^k = I_n.$$

Il est également facile de voir que la puissance d'un multiple de l'identité (ou plus généralement d'une matrice diagonale) se calcule très facilement

**Proposition 1.** (Puissance d'une matrice diagonale)

Soit $M$ une matrice (carrée) diagonale. Alors, $M^k$ est encore diagonale, et ses éléments diagonaux sont les puissances $k-$ièmes des éléments diagonaux de $M$:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

☞ Se ramener à un calcul de puissance de matrice diagonale s'avère donc particulièrement intéressant; on va voir un peu plus loin que c'est souvent ce qu'on essaie - et parfois on peut - de faire pour calculer les puissances d'une matrice $A$.

☞ Par exemple,

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-2)^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \qquad (\lambda I_n)^k = \lambda^k I_n.$$

Comme le produit matriciel ne commute pas en général, la puissance de matrice ne garde seulement que certaines propriétés des réels.

**Proposition 2.** Soient $k, l, n \in \mathbb{N}$ et $A, B \in \mathcal{M}_p(R)$.

(1) $A^k A^l = A^{k+l}$.
(2) $(A^k)^l = A^{kl}$.
(3) **Lorsque** $A$ **et** $B$ **commutent**, on a

(i) $(AB)^k = A^k B^k$;
(ii) $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$;
(iii) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;
(iv) $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$;
(v) La *Formule du binôme*:

$$(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i B^{n-i}.$$

☞ Toutes les puissances d'une matrice carrée $A$ commutent entre elles.

### 1.1 Polynômes de matrices

**Définition 2.** *Soient $P(X) = a_n X^n + ... + a_1 X + a_0 \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme et $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On définit l'évaluation de $P$ en $A$ comme la matrice*

$$P(A) = a_n A^n + ... + a_1 A + a_0 \mathrm{Id}_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}).$$

☞ Lorsque $P(A) = 0_p$, on dit que $P$ est un *polynôme annulateur* de $A$.

On peut utiliser les propriétés des polynômes pour obtenir des informations sur les matrices (inverse, puissances). L'exercice suivant est un exemple très intéressant.

**Exercice 1.** Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P(X) = X^2 - 3X + 2$.

(1) Calculer $P(A)$.
(2) Soit $n \geq 3$. Effectuer la division euclidienne de $X^n$ par $P$.
(3) En déduire l'expression de $A^n$.

### 1.2 Application: Puissances de matrices & suites numériques

Les puissances de matrices peuvent être très utiles dans l'étude des suites récurrentes et des suites croisées.

**Exercice 2.** Soient $(a_n)$, $(b_n)$ et $(c_n)$ trois suites réelles définies par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ b_0 = 2 \\ c_0 = 7 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \\ b_{n+1} = 3b_n + c_n \\ c_{n+1} = 3c_n \end{cases}$$

L'objectif de l'exercice est d'obtenir l'expression des termes généraux des trois suites.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$. Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$.
(2) En déduire que $X_n = A^n X_0$.
(3) Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $N^2$, $N^3$, puis $N^p$, pour $p \geq 3$.

(4) Montrer que, pour tout $n \geq 0$,
$$A^n = 3^n I_3 + 3^{n-1} n N + 3^{n-2}\frac{n(n-1)}{2} N^2.$$
(5) Conclure.

## 2 Inverse d'une matrice

**Définition 3.** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On appelle* **matrice inverse** *de $A$ et on note $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice qui vérifie*
$$AA^{-1} = \mathrm{Id}_n = A^{-1}A.$$
*L'ensemble des matrices carrées de taille $n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ qui admettent une matrice inverse est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.*

☞ Naturellement, la matrice identité est inversible et elle est sa propre matrice inverse
$$I_n I_n = I_n \Longrightarrow I_n^{-1} = I_n.$$

**Proposition 3.** Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
(1) $A^{-1}$ est unique: si $BA = \mathrm{Id}_n$ ou $AB = \mathrm{Id}_n$ alors $B = A^{-1}$;
(2) $(A^{-1})^{-1} = A$;
(3) ⚠ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
(4) ${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$.

**Proposition 4.** (Inverse d'une matrice diagonale)
Si $M$ est diagonale alors elle est inversible si et seulement si tous ses éléments diagonaux sont non nuls. Son inverse est alors égale à la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les inverses des éléments diagonaux de $M$:
$$\textbf{Si (et seulement si) } \lambda_i \neq 0, \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1/\lambda_n \end{pmatrix}.$$

☞ En particulier,
$$\text{Si } \lambda \neq 0, \quad (\lambda_n)^{-1} = \frac{1}{\lambda} I_n, \qquad \text{ou, autre exemple,} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 3.**
(1) Vérifier que $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(2) Soit $n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}^*$. Vérifier que $\lambda I_n$ est inversible, d'inverse $\frac{1}{\lambda} I_n$ et que $0_n$ n'est pas inversible.

**Remarque 1.** Pour des matrices inversibles, les propriétés de calcul des puissances sont valables pour des puissances négatives.

⚠ **Attention.** La somme de deux matrices inversibles n'est pas inversible en général. Par exemple $I_n$ et $-I_n$ sont inversibles mais $I_n - I_n = 0_n$ ne l'est pas.

En calcul matriciel, lorsqu'une matrice est inversible cela permet d'obtenir de nouvelles règles de calcul. On peut "simplifier" par cette matrice dans les égalités, comme on le fait dans $\mathbb{R}$ à l'aide de la division. Cependant il ne faut pas oublier de tenir compte de la **non commutativité** des matrices.

Pour ne pas faire d'erreur, il faut multiplier, à gauche ou à droite, par l'inverse de la matrice.

**Proposition 5.** Soient $C \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$, et $A$ et $B$ des matrices telles que les produits suivants aient un sens.

**Simplification à gauche:** $\begin{array}{l} CA = B \iff A = C^{-1}B \\ CA = CB \iff A = B \end{array}$

**Simplification à droite:** $\begin{array}{l} AC = B \iff A = BC^{-1} \\ AC = BC \iff A = B \end{array}$

**Exercice 4.**

(1) Soient $A, B$ telles que $AB = 0$. Montrer que si $A \neq 0$ et $B \neq 0$ alors ni $A$ ni $B$ ne sont inversibles.

(2) Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $B^2 + B$ et déduire que $B$ n'est pas inversible.

### 2.1 Polynôme annulateur et inverse

Soit $A$ une matrice carrée de taille $n$. La connaissance d'un polynôme annulateur de $A$, **si le coefficient constant de ce dernier est non nul**, peut permettre de conclure, par **factorisation** par $A$, à l'inversibilité de $A$ et d'exprimer l'inverse comme polynôme de $A$.

*Exemple.* On considère la matrice $A$ suivante

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier (exercice) que $P(X) = X^2 + X - 2$ est un polynôme annulateur de $A$. Mais alors,

$$P(A) = 0 \iff A^2 + A - 2I_3 = 0 \iff A^2 + A = 2I_3 \iff A\left(\frac{1}{2}(A + I_3)\right) = I_3.$$

Or, on sait que $A$ commute avec tout polynôme évalué en $A$. On a donc trouvé, sans trop d'efforts, l'inverse de $A$:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

### 2.2 Cas particulier des matrices $2 \times 2$

**Proposition 6.** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, où $a, b, c, d$ sont quatre nombres réels. Alors,

(1) Si $ad - bc = 0$, $A$ n'est pas inversible.

(2) Si $ad - bc \neq 0$, $A$ est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

### 2.3 Pivot de Gauss et inverse d'une matrice

La propriété suivante, admise, permet de caractériser les matrices inversibles à l'issue de l'algorithme du pivot de Gauss, effectué sur la matrice sans l'augmenter d'un second membre.

**Proposition 7.** Le nombre de pivots obtenus dans la résolution d'un système par la méthode de Gauss (qu'elle soit totale ou partielle) ne dépend pas du choix des pivots. Ce nombre est appelé le **rang du système** ou le **rang de la matrice**. Un système est de Cramer lorsqu'il y a autant de pivot que d'inconnue et d'équation.

✎ *Par conséquent, une matrice carrée de taille $n$ est inversible si et seulement si on a $n$ pivot à l'issue d'un algorithme du pivot de Gauss.*

☞ Si la question est uniquement de savoir si une matrice est inversible ou non, il est alors beaucoup plus économique en terme de calcul de ne faire qu'un algorithme partiel.

**Proposition 8.** Un matrice triangulaire (et a fortiori diagonale) est inversible si et seulement si tous ses termes diagonaux sont non nuls.

En plus de permettre de savoir si une matrice est inversible, le pivot de Gauss permet de calculer l'inverse de la matrice.

✎ **Méthode.** On considère une matrice $A$ carrée de taille $n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) dont **on sait** qu'elle est inversible. Pour calculer $A^{-1}$, on applique l'algorithme du pivot de Gauss **total** sur la matrice $A$ avec comme second membre $\mathrm{Id}_n$, en le prolongeant jusqu'à obtenir la matrice identité à la place de $A$. La matrice obtenue à la place de $\mathrm{Id}_n$ est alors $A^{-1}$.

*Exemple.* On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il est nécessaire de commencer par vérifier que cette matrice est inversible. Pour cela, on effectue un pivot de Gauss partiel sur les coefficients de la matrice jusqu'à obtenir une matrice de rang 3. En faisant par exemple $L_3 \longleftarrow 2L_3 - L1$ on voit que la matrice est *semblable* à la matrice

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

qui est triangulaire supérieure avec des éléments diagonaux non nuls. Par conséquent, $A$ est bien inversible. On peut donc effectuer notre pivot de Gauss total. On présente les choses comme ceci:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On commence donc par faire, comme précédemment, $L_3 \longleftarrow 2L_3 - L1$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

On fait ensuite $L_1 \longleftarrow L_1 - L_3$ et $L_2 \longleftarrow L_2 + L_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Enfin, on se ramène à des coefficients diagonaux égaux à 1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

On peut alors **vérifier** que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et conclure que

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 5.** Démontrer la Proposition 6.

### 2.4 Calcul de puissance de $A$ *via* calcul de $P^{-1}AP$

Dans le but de calculer les puissances d'une matrice $A$, on peut être amener à "tranformer" la matrice $A$ en une matrice plus simple (par exemple diagonale) à l'aide d'une matrice inversible. Si la recherche de la matrice $P$ nécessite des éléments du cours de deuxième année (voir le chapitre *Diagonalisation*), on peut, si on nous donne la bonne matrice, utiliser cette technique dès à présent.

**Exercice 6.** On considère les matrices On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Par la méthode du pivot de Gauss, montrer que $P$ est inversible et préciser $P^{-1}$.
(2) Déterminer $D = P^{-1}AP$. Expliciter alors la matrice $D^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
(3) Montrer que $A = PDP^{-1}$ puis que $A^n = PD^nP^{-1}$.
(4) Conclure.

# 3 Autres exercices

**Exercice 7.** On considère les trois matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer $AB$ puis $AC$. La matrice $A$ est-elle inversible?
(2) Déterminer toutes les matrices $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = 0$.

**Exercice 8.** Pour chacune des matrices suivantes, préciser si elles sont inversibles et, le cas échéant, déterminer leur inverse (par la méthode du pivot de Gauss).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 9.** (Interro n°3, Decembre 2016) On considère les trois matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer que $A^3 = A^2 + 2A$. La matrice $A$ est-elle inversible?
(2) Par la méthode du pivot de Gauss, montrer que $P$ est inversible et préciser $P^{-1}$.
(3) On note $D = P^{-1}AP$. Expliciter la matrice $D^n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

**Exercice 10.** On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ci-dessous. L'objectif de l'exercice est d'écrire $A_n$ en fonction de $n$, de deux manières différentes.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que $P(X) = X^2 + X - 2$ est un polynôme annulateur de $A$.
(2) Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^n$ par $P$.
(3) En déduire l'expression de $A^n$ en fonction de $n$.

**Exercice 11.** (D'après **EDHEC 1993**)

L'objection de l'exercice est de résoudre une équation matricielle, c'est à dire de trouver toutes les matrices $Z \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $Z^2 = A$, où $A$ est une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}, \qquad 0 < a < 1.$$

Dans toute la suite, on désigne par $P$ la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer $P^2$ puis $P^4$. Montrer que $P$ est inversible et trouver sa matrice inverse.
(2) Montrer que la matrice $D_a = P^{-1}AP$ est diagonale.
(3) Soit $Y = P^{-1}ZP$.
  (a) Montrer que l'équation $Z^2 = A$ est équivalente à l'équation $Y^2 = D_a$.
  (b) On pose alors $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.
    (i) Écrire le système de quatre équations *à* quatre inconnues $x, y, z$ et $t$ qui est équivalent à $Y^2 = D_a$.
    (ii) Montrer (par l'absurde) qu'aucune solution ne vérifie $x + t = 0$.
  (c) En déduire que l'équation $Z^2 = A$ admet 0, 2 ou 4 solutions, selon que $a < 1/2$, $a = 1/2$ ou $a > 1/2$.
  (d) Donner les quatre solutions de l'équation dans le cas où $a = 5/8$.

**Exercice 12.** (D'après **EML 2005**)

On considère les trois matrices suivantes

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ et } K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer $J^2$, $JK$, $KJ$ et $K^2$.
(2) On pose $L = I + J$.
  (a) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$, $L^n = I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2}K$.
  (b) Montrer que $L$ est inversible et que, pour $n \in \mathbb{Z}$, on a encore $L^n = I + nJ + \dfrac{n(n-1)}{2}K$.
  (c) Exprimer, pour $n \in \mathbb{Z}$, $L^n$ en fonction de $I, L$, $L^2$ et $n$.
(3) On introduit maintenant les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

  (a) À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, montrer que $P$ est inversible et expliciter $P^{-1}$.
  (b) Montrer que $P^{-1}AP = L$.
  (c) Pour $n \in \mathbb{Z}$, exprimer $A^n$ en fonction de $I$, $A$, $A^2$ et $n$.

**Exercice 13.** (Extrait du DS3, Février 2017 - D'après **EML 2002**)

On considère les deux matrices carrées réelles suivantes

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(1) (a) Calculer $K^2$.
  (b) En déduire que la matrice $K$ est inversible et déterminer $K^{-1}$.

(2) Soient $a$ et $b$ deux nombres réels. On note $M$ la matrice définie par $M = aI + bK$.

(a) Montrer que $M^2 = -(a^2+b^2)I + 2aM$.

(b) En déduire que, si $a$ et $b$ sont tous les deux non nuls, alors la matrice $M$ est inversible, et exprimer son inverse comme combinaison linéaire de $I$ et $M$.

(c) *Application :* Justifier que la matrice ci-dessous est inversible et donner son inverse

$$\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 1+\sqrt{2} & 1 & -2 \\ 0 & -1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

**Exercice 14.** (Extrait du DS3, Février 2017)

Soit $(u_n)$ la suite à récurrence linéaire d'ordre 3 définie ci-dessous par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_0 & = & 0 \\ u_1 & = & 1 \\ u_2 & = & -1 \\ u_{n+3} & = & u_{n+2} + u_{n+1} - u_n \end{array} \right. .$$

Le but de cet exercice est de déterminer la valeur de $u_n$ en fonction de $n$. On note, pour tout entier $n$,

$$V_n = \begin{pmatrix} v_{n+2} \\ v_{n+1} \\ v_n \end{pmatrix}.$$

(1) (a) Déterminer une matrice $M$ telle que pour tout entier $n$, $V_{n+1} = M \cdot V_n$.

(b) Démontrer que, pour tout entier $n$, $V_n = M^n V_0$.

(2) On introduit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = N + D.$$

(a) Déterminer la matrice $P$ telle que $A \cdot P = P \cdot B$ avec $P$ de la forme

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & u \\ y & b & v \end{pmatrix}.$$

(b) Monter que $P$ est inversible et préciser $P^{-1}$.

(c) Montrer que $A = P \cdot B \cdot P^{-1}$ et en déduire $A^n$ en fonction de $B^n$.

(3) (a) Calculer $N^2$ et en déduire pour tout $n$ entier la valeur de $N^n$.

(b) En déduire la valeur de $B^n$ en fonction de $n$.

(c) Calculer enfin $V_n$ puis $u_n$ en fonction de $n$.