Maths Edhec voie E 2019 : un corrigé

Proposé par Martin Canu : martin.canu@wanadoo.fr

Exercice 1

1) a: $A-I=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&2&2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$ et, sans difficulté : $\boxed{(A-I)^2=O_3}$

b: On a $A^2-2A+I=O_3$ donc $I=-A^2+2A=A(-A+2I)$. On sait que si $AB=I$ alors A est inversible et $A^{-1}=B$, donc $\boxed{A \text{ est inversible et } A^{-1}=-A+2I}$

2) a: N et I commutent, donc on peut développer $(N+I)^n$ avec la formule du binôme.
De plus, comme $N^2=O_3$, on a immédiatement $N^k=O_3$ pour $k\geqslant 2$.
Pour $n\geqslant 2$: $A^n=(N+I)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^k=\binom{n}{0}N^0+\binom{n}{1}N^1=I+nN$.
La formule marche pour $n=0$ et $n=1$: $\boxed{\forall n\in\mathbf{N}\qquad A^n=I+nN}$

b: Pour $n=-1$, $I+nN=I-N=I-(A-I)=2I-A=A^{-1}$. La formule est toujours valable.

3) a: On dispose d'un polynôme annulateur pour la matrice A : $p(x)=(x-1)^2$
On sait que toute valeur propre λ de A vérifie $P(\lambda)=0$ donc, nécessairement, $\lambda=1$ et donc $Sp(A)\subset\{1\}$.
Reste à vérifier que 1 est bien valeur propre.
$(A-I)(A-I)=O_3$. Si $(A-I)$ était inversible, en multipliant par $(A-I)^{-1}$ on aurait $A-I=O_3$, ce qui n'est pas vrai.
Donc $A-I$ n'est pas inversible, et 1 est bien valeur propre : $\boxed{Sp(A)=\{1\}}$

b: Si A était diagonalisable, on aurait A semblable à I donc $A=I$, ce qui n'est pas vrai.
Donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$

4) a: $mat_{\mathscr{B}}(f-id)=A-I$. Or $A-I$ a trois colonnes colinéaires (non nulles) donc $A-I$ est de rang 1.
On a bien $\boxed{rg(f-id)=1}$

b: La formule du rang donne : $\dim(\ker(f-id))+rg(f-id)=3$ donc $\dim(\ker(f-id)=2$.
$(f-id)(u_1)=(f-id)^2(e_1)=0_{\mathbf{R}^3}$ car $(f-id)^2$ est l'endomorphisme nul.
On calcule les composantes de $(f-id)(u_2)$ dans $\mathscr{B}$ avec le produit matriciel $\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&2&2\\1&-2&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
Donc $u_1\in\ker(f-id)$ et $u_2\in\ker(f-id)$. Les deux vecteurs u_1 et u_2 sont non colinéaires donc forment une famille libre de $\ker(f-id)$ et $\dim(\ker(f-id))=2$, donc (u_1,u_2) est bien une base de $\ker(f-id)$.

5) a: Soit P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à la famille $\mathscr{B}'=(u_1,u_2,e_1)$: $P=\begin{pmatrix}-1&1&1\\-2&0&0\\1&1&0\end{pmatrix}$.
En échangeant la ligne 2 et la ligne 3 on obtient une matrice triangulaire avec des pivots non nuls.
Donc P est inversible et $\mathscr{B}'$ est bien une base de $\mathbf{R}^3$.

b: $f(u_1)=u_1$, $f(u_2)=u_2$ et $f(e_1)=u_1+e_1$ car $f(e_1)-e_1=u_1$. La construction directe de la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$ donne : $\boxed{T=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}$

6) La formule de changement de base du cours donne $\boxed{T=P^{-1}AP}$

7) a: Soit $M=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$.

$$MT=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&a+c\\d&e&d+f\\g&h&g+i\end{pmatrix}$$

$TM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$MT = TM \Longleftrightarrow a+g=a; b+h=b; c+i=a+c; d+f=f; g+i=i \Longleftrightarrow g=0; h=0; d=0; a=i$

$MT = TM \Longleftrightarrow M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec $(a,b,c,e,f) \in \mathbf{R}^5$

Donc $E = \{a(E_{1,1}+E_{3,3}) + bE_{1,2} + cE_{1,3} + eE_{2,2} + fE_{2,3} \ / \ (a,b,c,e,f) \in \mathbf{R}^5\} = Vect(\mathscr{F})$
avec $\mathscr{F} = (E_{1,1}+E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$
Cela prouve déjà que E **est un sous espace vectoriel de** $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ et que $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E.
Montrons que $\mathscr{F}$ est une famille libre.

$a(E_{1,1}+E_{3,3}) + bE_{1,2} + cE_{1,3} + eE_{2,2} + fE_{2,3} = O_3 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = O_3 \Longleftrightarrow a=b=c=e=f=0$

$\mathscr{F}$ est donc libre, et forme une base de E. Donc $\boxed{\dim(E) = 5}$

b: Utilisons les endomorphismes. Soit h l'endomorphisme ayant N comme matrice dans la base $\mathscr{B}$.
$NA = AN \Longleftrightarrow h \circ f = f \circ N \Longleftrightarrow N'T = TN'$ en notant $N' = P^{-1}NP$

c: D'après ce qui précède $AN = NA \Longleftrightarrow N' = a(E_{1,1}+E_{3,3}) + bE_{1,2} + cE_{1,3} + eE_{2,2} + fE_{2,3}$ avec $(a,b,c,e,f) \in \mathbf{R}^5$
Donc F est l'ensemble des matrices N avec
$N = PN'P^{-1} = aP(E_{1,1}+E_{3,3})P^{-1} + bPE_{1,2}P^{-1} + cPE_{1,3}P^{-1} + ePE_{2,2}P^{-1} + fPE_{2,3}P^{-1}$ avec $(a,b,c,e,f) \in \mathbf{R}^5$.
Cela répond bien à la question.

Exercice 2

1) Au mieux $X=1$, au pire $X=n$ et toutes les valeurs intermédiaires sont possibles, donc $\boxed{X(\Omega) = [[1,n]]}$

2) a: Si on sait $B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{i-1}$, pour le i-eme tirage, il reste $n-(i-1)$ boules dans l'urne, dont une boule noire.
Donc $P_{B_1 \cap \ldots \cap B_{i-1}}(B_i) = \dfrac{n-(i-1)-1}{n-(i-1)} = \dfrac{n-i}{n-i+1}$

b: $(X=k)$ est l'événement $B_1 \cap \ldots B_{k-1} \cap N_k$.
En utilisant la formule des probas composées :
$P(X=k) = \dfrac{n-1}{n} \times \dfrac{n-2}{n-1} \times \ldots \times \dfrac{n-(k-1)}{n-k+2} \times \dfrac{1}{n-k+1} = \dfrac{1}{n}$ (par télescopage multiplicatif).
$\boxed{\forall n \in [[1,n]] \quad P(X=k) = \dfrac{1}{n}}$

c: Il en résulte que : $\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{U}_{[[1,n]]} \quad E(X) = \dfrac{n+1}{2} \quad V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}}$

3) a: Notons B'_i l'événement « le i-eme tirage donne une boule blanche numérotée 0 ». $(X=k) \cap (Y=0) = B'_1 \cap B'_2 \cap \ldots \cap B'_{k-1} \cap N_k$.
Par le même principe :
$P[(X=k) \cap (Y=0)] = \dfrac{n-2}{n} \times \dfrac{n-3}{n-1} \times \dfrac{n-4}{n-2} \times \ldots \times \dfrac{n-k}{n-k+2} \times \dfrac{1}{n-k+1} = \dfrac{(n-k) \times 1}{n(n-1)} = \dfrac{n-k}{n(n-1)}$ (par télescopage multiplicatif).

b: On utilise le système complet d'événements $(X=k)_{k \in [[1,n]]}$. La formule des probabilités totales donne :
$P(Y=0) = \sum_{k=1}^{n} P(X=k \cap Y=0) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n-k}{n(n-1)} = \dfrac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (n-k)$
On pose $i = n-k$ dans cette dernière somme :
$P(Y=0) = \dfrac{1}{n(n-1)} \sum_{i=n-1}^{0} i = \dfrac{1}{n(n-1)} \sum_{i=0}^{n-1} i = \dfrac{1}{n(n-1)} \times \dfrac{(n-1)n}{2} = \dfrac{1}{2}$ $\boxed{P(Y=0) = \dfrac{1}{2}}$

c: $P(Y=1) = 1 - P(Y=0) = \dfrac{1}{2}$. Donc $\boxed{Y \hookrightarrow \mathscr{B}\left(\dfrac{1}{2}\right) \quad E(Y) = \dfrac{1}{2} \quad V(Y) = \dfrac{1}{4}}$

4) a: En ligne 6 : `Nb=Nb-1` (une boule blanche a été tirée)
En ligne 7 : `u=grand(1,1,'uin',1,Nb+1)` (il reste $Nb+1$ boule dans l'urne)
En ligne 8 : `X=X+1` (un tirage de plus)

b: En ligne 4 : `Y=0`
En ligne 8 : `Y=1`
On peut répondre aux deux question a : et b : avec le script complet suivant :

```
1  n=input('entrez une valeur pour n : ')
2  nB=n-1
3  X=1
4  Y=0
5  u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
6  while u<nB+1
7      nB=nB-1
8      if u==1 then Y=1
9      end
10     u=grand(1,1,'uin',1,nB+1)
11     X=X+1
12 end
13 disp(X,'la boule noire est apparue au tirage numéro : ')
14 disp(Y,'la valeur de Y est : ')
```

Exercice 3

1) $u_1 = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)\,dt = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$u_2 = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^2\,dt = \int_0^1 (1-2t^2+t^4)\,dt = \left[t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5\right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15-10+3}{5} = \frac{8}{15}$

$$\boxed{u_1 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{8}{15}}$$

2) a: $u_{n+1} - u_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\,dt - \int_0^1 (1-t^2)^n\,dt = \int_0^1 (1-t^2)^n(1-t^2-1)\,dt = -\int_0^1 t^2(1-t^2)^n\,dt \leqslant 0$

car $t^2(1-t^2)^n \geqslant 0$ pour $t \in [0,1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 t^2(1-t^2)^n\,dt \geqslant 0$ (positivité de l'intégrale).

Donc $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite (u_n) est bien décroissante.

b: Du fait de la positivité de l'intégrale, $u_n \geqslant 0$, donc (u_n) est décroissante, minorée par 0 donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.

3) a: Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2\sigma^2}$ et $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$.

On reconnaît en f une densité de $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, donc $I = 1$.

b: Soit $J_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-nt^2}\,dt$. On choisit σ de sorte que $\dfrac{1}{2\sigma^2} = n$.

Donc $\sigma^2 = \dfrac{1}{2n}$ soit encore : $\sigma = \sqrt{\dfrac{1}{2n}}$. Avec cette valeur de σ :

$J_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2\sigma^2}\,dt = I \times \sigma\sqrt{2\pi} = \sqrt{\frac{2\pi}{2n}} = \sqrt{\frac{\pi}{n}}$.

Posons $K_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nt^2}\,dt$. Comme f est paire, $K_n = \dfrac{1}{2}J_n$ $\quad \boxed{J_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{n}} \text{ et } K_n = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}}$

c: $x \mapsto e^x$ est convexe et $y = 1 + x$ est l'équation de la tangente en 0. Donc $\forall x \in \mathbf{R} \quad e^x \geqslant 1 + x$

Avec $x = -t^2$, on obtient $e^{-t^2} \geqslant 1 - t^2$.

d: On a donc, pour $n \in \mathbf{N}$, : $\quad (1-t^2)^n \leqslant (e^{-t^2})^n = e^{-nt^2}$

En intégrant entre 0 et 1 : $\quad \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt \leqslant \int_0^1 e^{-nt^2}\,dt \leqslant \int_0^{+\infty} e^{-nt^2}\,dt$

Donc $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$ et, par le théorème d'encadrement : $\quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

4) $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\,dt = \int_1^0 u^n(-du)$ $\quad$ en utilisant le changement affine $u = 1 - t$.

Donc $\displaystyle\int_0^1 (1-t)^n\,dt = \int_0^1 u^n\,du = \frac{1}{n+1}$.

Pour $t \in [0,1]$, $t^2 \leqslant t$ donc $1-t^2 \geqslant 1-t$ et $(1-t^2)^n \geqslant (1-t)^n$

En intégrant entre 0 et 1, on obtient : $\quad u_n \geqslant \dfrac{1}{n+1}$

On sait que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{n+1}$ diverge, donc, par la règle de comparaison des séries à termes positifs :

$\boxed{\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ diverge}}$

5) **a:** $u_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\,dt$

Prenons $u(t) = (1-t^2)^{n+1}$ et $v'(t) = 1$, d'où $u'(t) = -2(n+1)t(1-t^2)^n$ et $v(t) = t$

u et v sont C^1 sur $[0,1]$, on peut donc intégrer par parties :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \Big[(1-t^2)^{n+1} \times t\Big]_0^1 + 2(n+1)\int_0^1 t^2(1-t^2)^n\,dt \\ &= 0 + 2(n+1)\int_0^1 \left((t^2-1)(1-t^2)^n + (1-t^2)^n\right)\,dt \\ &= 2(n+1)\left(\int_0^1 (1-t^2)^n\,dt - \int_0^1 (1-t^2)^{n+1}\,dt\right) \\ &= 2(n+1)(u_n - u_{n+1}) \end{aligned}$$

C'est le résultat attendu.

b: Posons $(\mathscr{P}_n)\quad u_n = \dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!}$

• Pour $n=0$, $\dfrac{4^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \dfrac{1}{1} = 1 = u_0 \qquad$ donc $\quad \mathscr{P}_0$ est vrai.

• Supposons $\mathscr{P}_n$ vrai, montrons $\mathscr{P}_{n+1}$ vrai, c'est à dire $u_{n+1} = \dfrac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+3)!}$.

Or $u_{n+1} + 2(n+1)u_{n+1} = 2(n+1)u_n$ ou encore $u_{n+1} = \dfrac{2n+2}{2n+3}u_n$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2(n+1)}{2n+3}u_n = \frac{2(n+1)}{2n+3}\,\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!} \\ &= \frac{[2(n+1)]^2\,4^n(n!)^2}{(2n+3)\times(2n+2)\times(2n+1)!} = \frac{4^{n+1}((n+1)!)^2}{(2n+3)!} \end{aligned}$$

Donc $\mathscr{P}_{n+1}$ est vrai, ce qui achève la récurrence.

c: Quand n tend vers $+\infty$, $n! \sim \sqrt{2\pi n}\; n^n\, e^{-n}$ donc $(n!)^2 \sim 2\pi n \times n^{2n}\, e^{-2n}$.

$\dfrac{2^n(n!)^2}{(2n+1)\times(2n)!} \sim \dfrac{4^n \times 2\pi n \times n^{2n} e^{-2n}}{(2n)\times\sqrt{2\pi(2n)}\times(2n)^{2n}e^{-2n}}$

$u_n \sim \dfrac{\pi}{\sqrt{4\pi n}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$

On a bien $\quad u_n \sim \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{n}}$.

6) On calcule $n!$ en faisant `v = prod(x)`

On calcule $(2n+1)!$ en faisant `w = prod(y)`

Ensuite : `u = 4^ n * v^ 2 / w`

Problème

Partie 1 : étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire X

1) f est positive, continue sur $\mathbf{R}$ sauf éventuellement en $x_0 = 1$.

Calculons $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$

$I = \displaystyle\int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Posons $J(A) = \displaystyle\int_1^A f(x)\,dx$ pour $A \geqslant 1$

$J(A) = \dfrac{1}{\theta}\displaystyle\int_1^A x^{-1-1/\theta}\,dx = \dfrac{1}{\theta}\left[\dfrac{x^{-1-1/\theta+1}}{-1+1/\theta+1}\right]_1^A = -\left[x^{-1/\theta}\right]_1^A = 1 - \dfrac{1}{A^{1/\theta}}$

$\lim\limits_{A+\infty} J(A) = 1$ donc $I = 1$ et f **est bien une densité**.

2) Déterminons les conditions d'existence et la valeur des moments d'ordre n ($n \in \mathbf{N}^*$).

$$\begin{aligned}
m_n(x) \text{ existe} &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x)\,dx \text{ CV} \iff \frac{1}{\theta}\int_1^{+\infty} \frac{x^n}{x^{1+1/\theta}}\,dx \qquad \text{CV}\\
&\iff \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1+1/\theta-n}}\,dx \qquad \text{CV}\\
&\iff 1+\frac{1}{\theta}-n > 1 \iff n < \frac{1}{\theta}
\end{aligned}$$

Or $\theta \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ donc $\dfrac{1}{\theta} \in]2,+\infty[$. Donc $m_n(X)$ existe pour $n = 1$ et $n = 2$.

$E(X)$ et $E(X^2)$ existent donc $V(X)$ existe.

Pour $n \leqslant 2$, $m_n(X) = \dfrac{1}{\theta}\displaystyle\int_1^{+\infty} x^{-1-1/\theta+n}\,dx$.

$m_n(X) = \lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{1}{\theta} \times \dfrac{1}{-1/\theta+n}\left[x^{-1/\theta+n}\right]_1^A = \lim\limits_{A\to+\infty} \dfrac{1}{n\theta-1}\left(\dfrac{1}{A^{-1/\theta+n}}-1\right) = \dfrac{1}{1-n\theta}$

En particulier $E(X) = \dfrac{1}{1-\theta}$ et $E(X^2) = \dfrac{1}{1-2\theta}$.

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \dfrac{1}{1-2\theta} - \dfrac{1}{1-\theta^2} = \dfrac{(1-\theta)^2-(1-2\theta)}{(1-2\theta)(1-\theta)^2} = \dfrac{\theta^2}{(1-2\theta)(1-\theta)^2}$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{1-\theta} \qquad V(X) = \frac{\theta^2}{(1-2\theta)(1-\theta)^2}}$$

3) Soit $x \in \mathbf{R}$. $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,dt$. $F(x) = 0$ si $x < 1$.

Pour $x \geqslant 1$ $\quad F(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\,dt = 1 - \dfrac{1}{x^{1/\theta}}$ $\quad$ (voir calculs de la question 1).

$$\boxed{F(x) = 1 - \frac{1}{x^{1/\theta}} \text{ pour } x \geqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \text{F(x)=0 si } x < 1}$$

4) Nécessairement, $F(x) = \dfrac{1}{2}$ est impossible si $x < 1$. Pour $x \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
F(x) = \frac{1}{2} &\iff 1 - \frac{1}{x^{1/\theta}} = \frac{1}{2}\\
&\iff \frac{1}{x^{1/\theta}} = \frac{1}{2}\\
&\iff x^{1/\theta} = 2\\
&\iff \frac{1}{\theta}\ln(x) = \ln(2)\\
&\iff x = e^{\theta\ln(2)} = 2^\theta
\end{aligned}$$

$$\boxed{M_e = 2^\theta}$$

b: $2^x(1-x) \leqslant 1 \iff x\ln(2) + \ln(1-x) \leqslant 0$

Posons $h(x) = x\ln(2) + \ln(1-x)$ pour $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

h est C^∞ et $h'(x) = \ln(2) - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{-x\ln(2)-1+\ln(2)}{1-x}$ qui est du signe du numérateur.

Or $-1+\ln(2)$ est négatif donc $h'(x) < 0$. h est strictement décroissante sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et $h(0) = 0$.

Donc $\forall x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right] \qquad 2^x(1-x) \leqslant 1$.

c: $E(X)-M_e=\dfrac{1}{1-\theta}-2^\theta=\dfrac{1-2^\theta(1-\theta)}{1-\theta}\geqslant 0$ d'après ce qui précède.

Donc $\boxed{\forall\theta\in\left]0,\frac{1}{2}\right[\qquad E(X)\geqslant M_e}$

5) **a:** $P_{(X>a)}(X>a+b)=\dfrac{P(X>a+b\cap X>a)}{P(X>a)}=\dfrac{\frac{1}{(a+b)^{1/\theta}}}{\frac{1}{a^{1/\theta}}}=\left(\dfrac{a}{a+b}\right)^{1/\theta}$.

C'est le résultat attendu.

b: $\lim\limits_{a+\infty}\dfrac{a}{a+b}=1$, donc $\lim\limits_{a\to+\infty}P_{(X>a)}(X>a+b)=1$.

On peut interpréter cela en remarquant que si l'appareil fonctionne longtemps, il est presque certain qu'il fonctionne beaucoup plus longtemps. Elliptique ...

Partie 2 : simulation de X

6) **a:** $G(x)=P(Y\leqslant x)=P(\ln(X)\leqslant x)=P(X\leqslant e^x)=F(e^x)$

Si $x\geqslant 0$ $\quad e^x\geqslant 1$ donc $F(e^x)=1-\dfrac{1}{(e^x)^{1/\theta}}=1-e^{-x/\theta}$

Si $x<0$ $\quad e^x<1$ donc $F(e^x)=0$

$\boxed{G(x)=1-e^{-x/\theta}\text{ si }x\geqslant 0\qquad\text{et}\qquad F(x)=0\text{ sinon}}$

b: On reconnaît une loi exponentielle : $\boxed{Y\hookrightarrow\mathscr{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)}$

7) Sans problème : `Y=grand(1,1,'exp',theta);X=exp(Y)`

Partie 3 : estimation d'un paramètre

8) **a:** T_n est l'estimateur sans biais de référence pour estimer $E(Y)=\theta$.

b: Oui (c'est du cours)

c: Notons r_n le risque quadratique. $r_n=V(T_n)$ car T_n est sans biais.

$$\begin{aligned} r_n &= \frac{1}{n^2}V\left(\sum_{k=1}^n Y_k\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n V(Y_k)\quad\text{par indépendance des }Y_k\\ &= \frac{nV(Y)}{n^2}=\frac{V(Y)}{n}=\frac{\frac{1}{\frac{1}{\theta^2}}}{n}\\ &= \frac{\theta^2}{n}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{Le risque quadratique est}\quad r_n=\frac{\theta^2}{n}}$

T_n est sans biais et $\lim\limits_{n\to+\infty}r_n=0$, cela suffit pour affirmer : $\boxed{T_n\text{ est un estimateur convergent de }\theta}$

9) **a:** C'est du cours : $\quad P\left(|T_n-E(T_n)>\varepsilon\right)\leqslant\dfrac{V(T_n)}{\varepsilon^2}$

b: L'inégalité précédente donne ici : $\quad P(|T_n-\theta|>\varepsilon)\leqslant\dfrac{\theta^2}{n\varepsilon^2}\quad$ donc $\quad P(|T_n-\theta|\leqslant\varepsilon)\geqslant 1-\dfrac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$. Or :

$$\begin{aligned}|T_n-\theta|\leqslant\varepsilon &\iff -\varepsilon\leqslant T_n-\theta\leqslant\varepsilon\\ &\iff T_n-\varepsilon\leqslant\theta\leqslant T_n+\varepsilon\\ &\iff \theta\in[T_n-\varepsilon,T_n+\varepsilon]\end{aligned}$$

On a donc $\quad P(\theta\in[T_n-\varepsilon,T_n+\varepsilon])\geqslant 1-\dfrac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$

C'est le résultat attendu.

c: $\theta \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc $\theta^2 \leqslant \dfrac{1}{4}$. Avec $n = 1000$, $\quad \dfrac{\theta^2}{n\varepsilon^2} \leqslant \dfrac{1}{4\times 10^3\varepsilon^2} \quad$ donc $\quad 1 - \dfrac{\theta^2}{n\varepsilon^2} \geqslant 1 - \dfrac{1}{4\times 10^3\varepsilon^2}$

On cherche ε pour avoir $1 - \dfrac{1}{4\times 10^3\varepsilon^2} \geqslant 0,9 \quad (1)$

$$\begin{aligned}
(1) \quad &\iff \quad \frac{1}{4\times 10^3\varepsilon^2} \leqslant 0,1\\
&\iff \quad 4\times 10^2\varepsilon^2 \geqslant 1\\
&\iff \quad \varepsilon^2 \geqslant \frac{1}{4}\ 10^{-2}\\
&\iff \quad \varepsilon \geqslant \frac{1}{2} 10^{-1}
\end{aligned}$$

On prend $\varepsilon = \dfrac{1}{2}\ 10^{-1}$, c'est à dire $\varepsilon = 0,05$, on a donc, avec $n = 1000$: $\quad P(\theta \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]) \geqslant 0,9$

On peut conclure : $\boxed{[T_{1000} - 0,05; T_{1000} + 0,05] \text{ est un intervalle de confiance de } \theta \text{ au niveau de confiance } 0,9}$