HEC
PARIS

ORAL HEC Paris 2018

MATHÉMATIQUES

EXEMPLES DE SUJETS ET DE CORRIGES

Option économique

EXERCICE PRINCIPAL

Dans tout l'exercice, E désigne un R-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

1. Question de cours.
   Donner la définition d'une famille génératrice de E. Que peut-on dire de son cardinal ?

   Pour tout endomorphisme f de E, on note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f :
$$C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\} \ .$$

2. a) Démontrer que $C(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
   b) Quelle est la plus grande dimension possible pour $C(f)$?

3. On suppose dans cette seule question que $E = \mathbb{R}^2$.
   On note j l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Trouver les matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $MJ = JM$.
   b) En déduire la dimension de $C(j)$.

4. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme de E pour lequel il existe $a \in E$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que la famille $(a, f(a), ..., f^{n_0}(a))$ est génératrice.

   a) On note p le plus grand entier strictement positif pour lequel la famille $\big(a, f(a), ..., f^{p-1}(a)\big)$ est libre.
   Montrer que $\big(a, f(a), ..., f^{p-1}(a)\big)$ est une base de E. Que vaut p ?

   b) Démontrer que, pour tout endomorphisme $g \in C(f)$, il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ tel que :
$$g = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k \ .$$

   c) En déduire la dimension de $C(f)$.

Exercice sans préparation

Une urne contient au départ une boule verte et une boule rouge. On effectue des tirages successifs selon la procédure suivante : on tire une boule, si elle est rouge, on arrête les tirages, si elle est verte on la remet dans l'urne en ajoutant une boule rouge. On note X le nombre de tirages effectués.

1. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
2. Montrer que $\dfrac{1}{X}$ admet une espérance et la calculer.

Corrigé de l'exercice principal

Dans tout l'exercice, E désigne un R-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$.

1. Question de cours.

$\boxed{\text{Donner la définition d'une famille génératrice de } E. \text{ Que peut-on dire de son cardinal ?}}$

On dit qu'une famille $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ de vecteurs de E est génératrice si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs de la famille :

$$\forall x \in E, \quad \exists\, (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p, \ x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i e_i \ .$$

Le cardinal d'une famille génératrice est au moins égal à la dimension de l'espace qu'elle engendre : $p \geq n$.

Pour tout endomorphisme f de E, on note $C(f)$ l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f :

$$C(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid f \circ g = g \circ f\} \ .$$

2. a) $\boxed{\text{Démontrer que } C(f) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(E).}$

$C(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ parce que :

— $C(f) \subset \mathcal{L}(E)$

— $C(f) \neq \emptyset$ car $Id_E \in C(f)$

— $\forall\, (v, w, \lambda) \in C(f)^2 \times \mathbb{K}, (v + \lambda w) \circ f = v \circ f + \lambda w \circ f = f \circ v + \lambda f \circ w = f \circ (v + \lambda w)$

b) $\boxed{\text{Quelle est la plus grande dimension possible pour } C(f) \text{ ?}}$

La plus grande dimension possible pour $C(f)$ est n^2, atteinte par exemple lorsque f est l'endomorphisme nul.

3. On suppose dans cette seule question que $E = \mathbb{R}^2$.

On note j l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ est $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

a) $\boxed{\text{Trouver les matrices } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ telles que } MJ = JM.}$

$$JM = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$MJ = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

La matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ commute donc avec J si, et seulement si, $c = 0$ et $a = d$.

Les matrices M telles que $MJ = JM$ sont donc les matrices de la forme $aI_2 + bJ$.

b) $\boxed{\text{En déduire la dimension de } C(j).}$

Isomorphe à $\text{Vect}\{I_2, J\}$, l'espace vectoriel $C(j)$ est de dimension 2.

4. On suppose dans cette question que f est un endomorphisme de E pour lequel il existe $a \in E$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que la famille $(a, f(a), ..., f^{n_0}(a))$ est génératrice.

a) On note p le plus grand entier strictement positif pour lequel la famille $\left(a, f(a), ..., f^{p-1}(a)\right)$ est libre.
Montrer que $\left(a, f(a), ..., f^{p-1}(a)\right)$ est une base de E. Que vaut p?

Par une récurrence facile, on prouve que, pour tout $k \geq p$, $f^k(a) \in \text{Vect}\left(a, f(a), ..., f^{p-1}(a)\right)$.

En distinguant les cas $n_0 < p$ et $n_0 \geq p$, on en déduit l'inclusion :

$$\text{Vect}\left(f^k(a), k \in [\![0, n_0]\!]\right) \subset \text{Vect}\left(a, f(a), ..., f^{p-1}(a)\right)$$

Il en résulte que la famille $(a, f(a), ..., f^{p-1}(a))$ est génératrice. Comme elle est libre, c'est une base de E.
Par conséquent : $\boxed{p = \dim E = n}$.

b) Démontrer que, pour tout endomorphisme $g \in C(f)$, il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ tel que :

$$g = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k .$$

Soit $g \in C(f)$.
$g(a)$ se décompose dans la base $(a, f(a), ..., f^{n-1}(a))$:

$$g(a) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k f^k(a) .$$

Deux endomorphismes de E sont égaux si, et seulement si, ils coïncident sur une base. Il suffit donc de montrer que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ $h(f^k(a)) = g(f^k(a))$
Soit donc $k \in [\![0, n-1]\!]$.
Comme f et g commutent, f^k et g commutent aussi, et en utilisant la linearité de f^k, on obtient

$$g\left(f^k(a)\right) = f^k\left(g(a)\right) = f^k\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^i(a)\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i f^{k+i}(a) = h\left(f^k(a)\right).$$

$$\boxed{f = g}$$

c) $\boxed{\text{En déduire la dimension de } C(f).}$

La dimension de $C(f)$ est égale à n puisque $\left(Id_E, f, ..., f^{n-1}\right)$ en est une famille libre et génératrice.

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. Soit $k \in \mathbb{N}$.
En notant V_i l'événement « tirer une boule verte au i-ème tirage », on a :

$$P(X > k) = P(V_1 \cap \ldots \cap V_k) = \frac{1}{(k+1)!} \cdot$$

On en déduit (ou on démontre directement) que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$P(X = k) = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!} = \frac{k}{(k+1)!}$$

d'où

$$kP(X = k) = \frac{k^2}{(k+1)!} = \frac{(k+1)k - (k+1) + 1}{(k+1)!} = \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} + \frac{1}{(k+1)!} \cdot$$

En utilisant la série exponentielle convergente $\sum\limits_{k \geq 0} \frac{1}{k!}$, dont la somme est égale à e, on en déduit que X admet une espérance, égale à :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\, P(X = k) = \mathrm{e} - (\mathrm{e} - 1) + (\mathrm{e} - 2) = \boxed{\mathrm{e} - 1}\,.$$

2. La variable $\frac{1}{X}$ est bornée et admet donc une espérance, calculable par la formule de transfert

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \boxed{\mathrm{e} - 2}\,.$$

EXERCICE PRINCIPAL

Soit a un nombre réel strictement positif.
On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont *tous* les termes sont strictement positifs, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\begin{cases} w_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \dfrac{a}{n} \\ \\ \ell_n = \ln(n^a\, u_n) \end{cases}$$

On suppose que la *série* de terme général w_n est absolument convergente.

1. Question de cours : formule de Taylor-Young.

2. Soit f la fonction $t \longmapsto \ln(1+t) - t$.

   a) Préciser le domaine de définition de f et donner un équivalent simple de cette fonction au voisinage de 0.

   b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 1} f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ est convergente.

3. Démontrer que les séries $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{w_n}{n}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} (w_n)^2$ sont convergentes.

4. a) Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité : $\ell_{n+1} - \ell_n = f\Big(w_n - \dfrac{a}{n}\Big) + w_n + a\, f\Big(\dfrac{1}{n}\Big)$.

   b) En déduire la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} (\ell_{n+1} - \ell_n)$.

5. a) Justifier la convergence de la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   b) En déduire l'existence d'un réel $A > 0$ tel que : $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{A}{n^a}$.

6. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{2\cdot 4 \cdots (2n)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}$.

EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. Indiquer l'allure du graphe de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

2. La fonction *Scilab* « cdfnor » permet de déterminer les valeurs de la fonction de répartition d'une loi normale et de sa bijection réciproque.
En voici deux exemples d'utilisation :

```
--> cdfnor("PQ",1.96,0,1)
 ans  =  0.9750021
--> cdfnor("X",0,1,0.975,0.025)
 ans  =  1.959964
```

a) Indiquer les sorties *Scilab* consécutives aux trois entrées suivantes :

```
--> cdfnor("PQ",0,0,1)
--> cdfnor("X",0,1,0.5,0.5)
--> cdfnor("X",0,1,0.025,0.975)
```

b) Expliquer le script suivant et fournir une estimation de la valeur affectée à p à l'issue de l'exécution du script.

```
--> n=1000;
--> X=zeros(n,1);
--> for i=1:n X(i,1)=grand(1,1,'nor',0,1)*grand(1,1,'bin',1,.5); end;
--> p=length(find(X<1.96))/n
```

Voie E
référence : E 121

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

Soit a un nombre réel strictement positif.
On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dont *tous* les termes sont strictement positifs, et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\begin{cases} w_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \dfrac{a}{n} \\ \\ \ell_n = \ln(n^a\, u_n) \end{cases}$$

On suppose que la *série* de terme général w_n est absolument convergente.

1. Question de cours : formule de Taylor-Young.

La formule de Taylor-Young, applicable à toute fonction f de classe C^2 au voisinage d'un point x_0, peut donc s'énoncer comme suit :

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\varepsilon(x)}$$

où $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

2. Soit f la fonction $t \longmapsto \ln(1 + t) - t$.

a) Préciser le domaine de définition de f et donner un équivalent simple de cette fonction au voisinage de 0.

La fonction est définie sur l'intervalle ouvert $]-1, +\infty[$.
Par la formule de Taylor-Young appliquée au point $x_0 = 0$, on obtient l'équivalent simple demandé :

$$\boxed{f(t) \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^2}{2}} \, .$$

b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\geq 1} f\left(\frac{1}{n}\right)$ est convergente.

Comme $f\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$ qui est le terme général, de signe constant, d'une série convergente, la série $\sum\limits_{n\geq 1} f\left(\frac{1}{n}\right)$ est convergente, elle aussi.

3. Démontrer que les séries $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{w_n}{n}$ et $\sum\limits_{n\geq 1} (w_n)^2$ sont convergentes.

La majoration $\dfrac{|w_n|}{n} \leq |w_n|$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et la majoration $(w_n)^2 \leq |w_n|$, valable pour n assez grand puisque w_n (en tant que terme général d'une série convergente) tend vers 0 quand n tend vers l'infini, permettent d'assurer par comparaison de séries à termes positifs que les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{w_n}{n}$ et $\sum_{n\geq 1}(w_n)^2$ sont (absolument) convergentes.

4. a) $\boxed{\text{Vérifier, pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ l'égalité : } \quad \ell_{n+1} - \ell_n = f\Big(w_n - \frac{a}{n}\Big) + w_n + a\, f\Big(\frac{1}{n}\Big)\,.}$

$$\begin{aligned} f\Big(w_n - \frac{a}{n}\Big) + w_n + a\, f\Big(\frac{1}{n}\Big) &= f\Big(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\Big) + \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{a}{n} + a\, f\Big(\frac{1}{n}\Big) \\ &= \ln\Big(\frac{u_{n+1}}{u_n}\Big) + \frac{a}{n} + a\Big(\ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n}\Big) = \ln\Big(\frac{u_{n+1}}{u_n}\Big) + a\,\ln(\frac{n+1}{n}) \\ &= \ln\big((n+1)^a u_{n+1}\big) - \ln\big(n^a u_n\big) = \ell_{n+1} - \ell_n\,. \end{aligned}$$

b) $\boxed{\text{En déduire la convergence de la série } \sum_{n\geq 1}\big(\ell_{n+1} - \ell_n\big)\,.}$

$$f\Big(w_n - \frac{a}{n}\Big) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{(w_n - \frac{a}{n})^2}{2} = -\frac{w_n^2}{2} + a\frac{w_n}{n} - \frac{a^2}{2n^2}$$

et $\ell_{n+1} - \ell_n$ est donc la somme des termes généraux de cinq séries convergentes.

Par conséquent, la série $\sum_{n\geq 1}\big(\ell_{n+1} - \ell_n\big)$ est convergente.

5. a) $\boxed{\text{Justifier la convergence de la suite } (\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\,.}$

La convergence de la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ résulte de la convergence de la série $\sum_{n\geq 1}\big(\ell_{n+1} - \ell_n\big)$ et des égalités :

$$\ell_n = \ell_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\big(\ell_{k+1} - \ell_k\big)\,.$$

b) $\boxed{\text{En déduire l'existence d'un réel } A > 0 \text{ tel que : } \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{n^a}\,.}$

On vient de constater qu'il existe un réel ℓ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} \ln(n^a u_n) = \ell\,.$$

Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit que $\lim_{n\to+\infty} n^a u_n = \mathrm{e}^{\ell}$ et par conséquent

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{n^a}$$

pour $A = \mathrm{e}^{\ell} > 0$.

6. $\boxed{\text{Déterminer la nature de la série } \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}\ .}$

Soit $u_n = \dfrac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+2}{2n+3}\ .$$

Comme la série de terme général $w_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{2n+3} = \dfrac{3}{2n(2n+3)}$ est absolument convergente, il existe d'après ce qui précède un réel $A > 0$ que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{A}{n^{1/2}}\ .$$

La série de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2\cdot 4\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdots(2n+1)}$ est donc divergente.

Corrigé de l'exercice sans préparation

1. Indiquer l'allure du graphe de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

On n'attend pas une œuvre d'art !

On exigera une expression intégrale de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite :

$$\Phi : x \longmapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-t^2/2} \mathrm{d}t \; .$$

On pourra demander de situer le point d'inflexion de la courbe (et d'en justifier la présence). Exiger la preuve qu'il s'agisse aussi d'un centre de symétrie constitue une question indiscrète.

2. La fonction *Scilab* « cdfnor » permet de déterminer les valeurs de la fonction de répartition d'une loi normale et de sa bijection réciproque.

En voici deux exemples d'utilisation :

```
--> cdfnor("PQ",1.96,0,1)
 ans  =  0.9750021
--> cdfnor("X",0,1,0.975,0.025)
 ans  =  1.959964
```

a) Indiquer les sorties *Scilab* consécutives aux trois entrées suivantes :

```
--> cdfnor("PQ",0,0,1)
--> cdfnor("X",0,1,0.5,0.5)
--> cdfnor("X",0,1,0.025,0.975)
```

Soit Z une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
Comme $P([Z \leq 0]) = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P([X \leq -x]) = 1 - P([X \leq x]]$, on obtient :

```
--> cdfnor("PQ",0,0,1)
 ans  = 0.5
--> cdfnor("X",0,1,0.5,0.5)
 ans  = 0.
--> cdfnor("X",0,1,0.025,0.975)
 ans  = - 1.959964
```

b) Expliquer le script suivant et indiquer une estimation de la valeur affectée à p à l'issue de l'exécution du script.

```
--> n=1000;
--> X=zeros(n,1);
--> for i=1:n X(i,1)=grand(1,1,'nor',0,1)*grand(1,1,'bin',1,.5); end;
--> p=length(find(X<1.96))/n
```

Remarque
Les fonctions « find » et « size » figurent dans le programme de la section E, sans que leur connaissance soit requise. On a donc rappelé la signification de « find » aux candidat(e)s qui en avaient besoin. La signification de « length » n'a pas eu besoin d'être indiquée, car elle est facile à deviner.

Soit $Z_1, Z_2 \ldots, Z_n, B_1, B_2 \ldots, B_n$ des variables aléatoires indépendantes, telles que les Z_i suivent la loi normale centrée réduite et les B_i la loi de Bernoulli de paramètre 1/2.
Par la formule des probabilités totales, les variables $X_i = Z_i B_i$ admettent pour fonction de répartition :

$$F_X : x \longmapsto F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2}\left(1 + \Phi(x)\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

```
--> n=1000;
--> X=zeros(n,1);
                                      //matrice-colonne nulle
--> for i=1:n X(i,1)=grand(1,1,'nor',0,1)*grand(1,1,'bin',1,.5); end;
                                      // n simulations indépendantes de X=ZB
--> p=length(find(X<1.96))/n
                                      // fréquence relative des simulations inférieures à 1.96
```

Par la loi faible des grands nombres, la fréquence $P_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{[X_i \leq X]}$ converge en probabilité vers $F_X(x)$.

On s'attend donc à une valeur proche de $\frac{1}{2}\left(1 + \Phi(1,96)\right) \simeq 0,9875$.

EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours

Rappeler la définition d'une bijection. Que peut-on dire de la composée de deux bijections ?

b) Justifier que la fonction $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{2x}\right)$ définit une bijection de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$, et trouver sa bijection réciproque.

2. Soit U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur l'intervalle $]0,1]$.

On pose : $X = \ln\left(\dfrac{1+U}{2U}\right)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

b) En déduire que X est une variable aléatoire à densité.

c) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$ et la calculer.

d) Justifier que X admet une espérance et la calculer.

e) Compléter le code de la fonction *Scilab* suivante pour qu'elle permette de créer des simulations, indépendantes, de la loi de X :

```
function x=simulX(n)
    x=zeros(n,1);
    for i=1:n
        x(i,1)=???;
    end;
endfunction
```

3. Soit B_1, B_2, X_1, X_2 quatre variables aléatoires indépendantes telles que B_1 et B_2 suivent la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, et que X_1 et X_2 suivent la même loi que la variable X de la question précédente.

On pose :

$$\begin{cases} Y_1 = B_1X_1 + (1-B_1)X_2 \\ Y_2 = B_1X_1 + B_2X_2 \end{cases}$$

a) Parmi les deux variables aléatoires Y_1 et Y_2, une seule est une variable à densité. Laquelle et pourquoi ?

b) Les deux variables aléatoires Y_1 et Y_2 ont-elles la même espérance ?

c) Proposer, pour chacune de ces deux variables, un script *Scilab* permettant d'en simuler une réalisation.

Exercice sans préparation

Pour tout nombre réel a, on note : $M(a) = \begin{pmatrix} a & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de a la matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable ?
2. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la matrice $M(a)$ est semblable à la matrice

$$N(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} .$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours

Rappeler la définition d'une bijection. Que peut-on dire de la composée de deux bijections ?

On dit qu'une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est bijective (ou que c'est une bijection) si elle vérifie :

$$\forall y \in F,\ \exists!\, x \in E,\ f(x) = y\ .$$

La composée $g \circ f$ d'une application bijective f de E dans F et d'une application bijective g de F dans un ensemble G est une application bijective de E dans G.

b) **Justifier que la fonction $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{2x}\right)$ définit une bijection de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$, et trouver sa bijection réciproque.**

Bien que le théorème de la bijection[1] (ou une preuve directe par résolution de l'équation $y = f(x)$) soit directement utilisable, la question de cours suggère d'écrire l'application

$$f := \left\{ \begin{array}{l}]0,1] \longrightarrow [0,+\infty[\\ x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{2x}\right) \end{array} \right.$$

comme la composée des applications $x \longmapsto \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2}$ et $x \longmapsto \ln(x)$, dont le sens de variation et les limites sont « évidentes ».
La première réalise une bijection (strictement décroissante) de $]0,1]$ sur $[1,+\infty[$, et la seconde une bijection (strictement croissante) de $[1,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

La bijection réciproque de f est l'application de $[0,+\infty[$ sur $]0,1]$ définie par :

$$\forall x \geq 0,\ \boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{2e^x - 1}}\ .$$

2. Soit U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur l'intervalle $]0,1]$.
On pose : $\quad X = \ln\left(\dfrac{1+U}{2U}\right)$.

a) **Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.**

Comme $U(\Omega) =]0,1]$, $X(\Omega) = f\big(U(\Omega)\big) = [0,+\infty[$.

1. Le signe de la dérivée $x \longmapsto \dfrac{-1}{x(1+x)}$ de $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{2x}\right)$ assure son injectivité et ses limites aux bornes sa surjectivité.

Pour tout $x \geq 0$, on a :

$$P([X \leq x]) = P([U \geq f^{-1}(x)]) = 1 - f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{2\mathrm{e}^x - 1}\,.$$

La fonction de répartition de X est donc donnée par :

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2(\mathrm{e}^x - 1)}{2\mathrm{e}^x - 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}\,.$$

b) En déduire que X est une variable aléatoire à densité.

La fonction F_X étant continue sur $\mathbb{R}$,[2] et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$[3], la variable X admet une densité, que l'on ne demande pas de calculer[4].

c) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ et la calculer.

L'intégrale ordinaire (sur un segment) $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x = \big[x\ln(x) - x\big]_\varepsilon^1 = -1 + \varepsilon - \varepsilon\ln(\varepsilon)$ tend vers -1 quand ε tend vers 0_+.

Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x = -1}$.

d) Justifier que X admet une espérance et la calculer.

La convergence (absolue) de l'intégrale obtenue par <u>transfert</u> assure l'existence de l'espérance de X et en fournit la valeur :

$$E(X) = E\Big(\ln\Big(\frac{1+U}{2U}\Big)\Big) = \int_0^1 \ln\Big(\frac{1+x}{2x}\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x - \ln(2) = \boxed{\ln(2)}.$$

e) Compléter le code de la fonction *Scilab* fournie pour qu'elle permette de créer des simulations indépendantes de la loi de X :

```
function x=simulX(n)
    x=zeros(n,1);
    for i=1:n
        x(i,1)=log(1/2+1/2/rand());
    end;
endfunction
```

2. parce que $F_X(0) = 0 = \lim\limits_{x \to 0_-} F_X(x)$.

3. Elle n'est en fait pas dérivable en 1.

4. $f_X : \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{2\mathrm{e}^x}{(2\mathrm{e}^x - 1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en est une.

3. Soit B_1, B_2, X_1, X_2 quatre variables aléatoires indépendantes telles que B_1 et B_2 suivent la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, et que X_1 et X_2 suivent la même loi que la variable X de la question précédente.

On pose :

$$\begin{cases} Y_1 = B_1X_1 + (1 - B_1)X_2 \\ Y_2 = B_1X_1 + B_2X_2 \end{cases}$$

a) Parmi les deux variables aléatoires Y_1 et Y_2, une seule est une variable à densité. Laquelle et pourquoi ?

Soit $x \in \mathbb{R}$.

Comme $P([B_1 = 1] \cap [Y_1 \leq x]) = P([B_1 = 1] \cap [X_1 \leq x]) = P([B_1 = 1])P([X_1 \leq x]$ et $P([B_1 = 0] \cap [Y_1 \leq x]) = P([B_1 = 0] \cap [X_2 \leq x]) = P([B_1 = 0])P([X_2 \leq x]$, on obtient par la formule des probabilités totales :

$$F_{Y_1}(x) = P([Y_1 \leq x]) = P([B_1 = 1])P([X_1 \leq x] + P([B_1 = 0])P([X_1 \leq x] = F_X(x) \ .$$

Par conséquent, $\underline{Y_1 \text{ suit la même loi que } X}$ et elle admet une densité.

Quant à Y_2, elle n'admet pas de densité, parce que :

$$P([Y_2 = 0]) \geq P([B_1 = 0] \cap [B_2 = 0]) = \frac{1}{4} \ .$$

Remarque : en fait, $P([Y_2 = 0]) = \frac{1}{4}$, mais c'est anecdotique.

b) Les deux variables aléatoires Y_1 et Y_2 ont-elles la même espérance ?

Oui, parce que $E(Y_1) = E(X) = \ln(2)$ et, par indépendance de B_1 et X_1 d'une part, de B_2 et X_2 d'autre part :

$$E(Y_2) = E(B_1)E(X_1) + E(B_2)E(X_2) = \frac{1}{2}E(X) + \frac{1}{2}E(X) = \ln(2) \ .$$

c) Proposer, pour chacune de ces deux variables, un script *Scilab* permettant d'en simuler une réalisation.

```
b1=grand(1,1,'bin',1,0.5); //simulation de B1
x1=simulX(1); //simulation de X1
x2=simulX(1); //simulation de X2
y1=b1*x1+(1-b1)*x2; simulation de Y1
y2=b1*x1+grand(1,1,'bin',1,0.5)*x2; simulation de Y2
```

Corrigé de l'exercice sans préparation

Pour tout nombre réel a, on note : $M(a) = \begin{pmatrix} a & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de a la matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable ?

La matrice $M(a) - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} a-\lambda & a \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $\lambda(\lambda - a - 1)$ est différent de 0, puisqu'elle a le même rang que la matrice triangulaire

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 0 & a-(a-\lambda)(1-\lambda) \end{pmatrix}$$

obtenue par les deux opérations élémentaires $L_1 \leftrightarrow L_2$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - (a-\lambda)L_1$.
Par conséquent : $\mathrm{Sp}(M(a)) = \{0, a+1\}$.

• Si $a \neq -1$, $M(a)$ est diagonalisable, puisque c'est une matrice carrée d'ordre 2 possédant deux valeurs propres distinctes.

• Si $a = -1$, la seule valeur propre de $M(a)$ est 0 et le sous-espace propre associé est de dimension 1. La matrice $M(-1)$ n'est donc pas diagonalisable, puisque la somme des dimensions de ses sous-espaces propres n'est pas égale à 2.

Finalement, $M(a)$ est diagonalisable si, et seulement si, a est différent de -1.

2. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la matrice $M(a)$ est semblable à la matrice :

$$N(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} .$$

La matrice $N(a)$ possède le même spectre que $M(a)$ (par un calcul similaire, ou toute autre méthode légale).

• Si $a \neq -1$, $M(a)$ et $N(a)$ sont semblables, parce qu'elles sont semblables à la même matrice diagonale :

$$D(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix} .$$

• Si $a = -1$, on note f l'endomorphisme dont $M(-1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} f(e_1) = -e_1 + e_2 \\ f(e_2) = -e_1 + e_2 \end{cases} .$$

Dès lors :

$$\begin{cases} f(e_1 - 2e_2) = e_1 - e_2 = (e_1 - 2e_2) + e_2 \\ f(e_2) = -e_1 + e_2 = -(e_1 - 2e_2) - e_2 \end{cases} .$$

La matrice de f dans la base $(e_1 - 2e_2, e_2)$ est donc $N(-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Par conséquent $M(-1)$ et $N(-1)$ sont semblables.

EXERCICE PRINCIPAL

1. a) Question de cours

Rappeler la définition d'une bijection. Que peut-on dire de la composée de deux bijections ?

b) Justifier que la fonction $x \longmapsto \ln\left(\frac{1+x}{2x}\right)$ définit une bijection de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$, et trouver sa bijection réciproque.

2. Soit U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur l'intervalle $]0,1]$.

On pose : $X = \ln\left(\dfrac{1+U}{2U}\right)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

b) En déduire que X est une variable aléatoire à densité.

c) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$ et la calculer.

d) Justifier que X admet une espérance et la calculer.

e) Compléter le code de la fonction *Scilab* suivante pour qu'elle permette de créer des simulations, indépendantes, de la loi de X :

```
function x=simulX(n)
    x=zeros(n,1);
    for i=1:n
        x(i,1)=???;
    end;
endfunction
```

3. Soit B_1, B_2, X_1, X_2 quatre variables aléatoires indépendantes telles que B_1 et B_2 suivent la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, et que X_1 et X_2 suivent la même loi que la variable X de la question précédente.

On pose :

$$\begin{cases} Y_1 = B_1X_1 + (1-B_1)X_2 \\ Y_2 = B_1X_1 + B_2X_2 \end{cases}$$

a) Parmi les deux variables aléatoires Y_1 et Y_2, une seule est une variable à densité. Laquelle et pourquoi ?

b) Les deux variables aléatoires Y_1 et Y_2 ont-elles la même espérance ?

c) Proposer, pour chacune de ces deux variables, un script *Scilab* permettant d'en simuler une réalisation.

Exercice sans préparation

Pour tout nombre réel a, on note : $M(a) = \begin{pmatrix} a & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de a la matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable ?
2. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la matrice $M(a)$ est semblable à la matrice

$$N(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} .$$

Corrigé de l'exercice principal

1. a) Question de cours

$\boxed{\text{Rappeler la définition d'une bijection. Que peut-on dire de la composée de deux bijections ?}}$

On dit qu'une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est bijective (ou que c'est une bijection) si elle vérifie :

$$\forall y \in F,\ \exists !\, x \in E,\ f(x) = y\ .$$

La composée $g \circ f$ d'une application bijective f de E dans F et d'une application bijective g de F dans un ensemble G est une application bijective de E dans G.

b) Justifier que la fonction $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{2x}\right)$ définit une bijection de $]0,1]$ sur $[0,+\infty[$, et trouver sa bijection réciproque.

Bien que le théorème de la bijection[1] (ou une preuve directe par résolution de l'équation $y = f(x)$) soit directement utilisable, la question de cours suggère d'écrire l'application

$$f := \left\{ \begin{array}{l}]0,1] \longrightarrow [0,+\infty[\\ x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{2x}\right) \end{array} \right.$$

comme la composée des applications $x \longmapsto \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2}$ et $x \longmapsto \ln(x)$, dont le sens de variation et les limites sont « évidentes ».
La première réalise une bijection (strictement décroissante) de $]0,1]$ sur $[1,+\infty[$, et la seconde une bijection (strictement croissante) de $[1,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$.

La bijection réciproque de f est l'application de $[0,+\infty[$ sur $]0,1]$ définie par :

$$\forall x \geq 0,\ \boxed{f^{-1}(x) = \frac{1}{2e^x - 1}}\ .$$

2. Soit U une variable aléatoire réelle de loi uniforme sur l'intervalle $]0,1]$.

On pose : $\quad X = \ln\left(\dfrac{1+U}{2U}\right)$.

a) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

Comme $U(\Omega) =]0,1]$, $X(\Omega) = f\big(U(\Omega)\big) = [0,+\infty[$.

1. Le signe de la dérivée $x \longmapsto \dfrac{-1}{x(1+x)}$ de $x \longmapsto \ln\left(\dfrac{1+x}{2x}\right)$ assure son injectivité et ses limites aux bornes sa surjectivité.

Pour tout $x \geq 0$, on a :

$$P([X \leq x]) = P([U \geq f^{-1}(x)]) = 1 - f^{-1}(x) = 1 - \frac{1}{2e^x - 1}.$$

La fonction de répartition de X est donc donnée par :

$$\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{2(e^x - 1)}{2e^x - 1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}}.$$

b) En déduire que X est une variable aléatoire à densité.

La fonction F_X étant continue sur $\mathbb{R}$,[2] et de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$[3], la variable X admet une densité, que l'on ne demande pas de calculer[4].

c) Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$ et la calculer.

L'intégrale ordinaire (sur un segment) $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \ln(x)\,dx = \big[x\ln(x) - x\big]_\varepsilon^1 = -1 + \varepsilon - \varepsilon\ln(\varepsilon)$ tend vers -1 quand ε tend vers 0_+.

Par conséquent, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx$ est convergente et : $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,dx = -1}$.

d) Justifier que X admet une espérance et la calculer.

La convergence (absolue) de l'intégrale obtenue par transfert assure l'existence de l'espérance de X et en fournit la valeur :

$$E(X) = E\Big(\ln\left(\frac{1+U}{2U}\right)\Big) = \int_0^1 \ln\left(\frac{1+x}{2x}\right) dx = \int_0^1 \ln(1+x)\,dx - \int_0^1 \ln(x)\,dx - \ln(2) = \boxed{\ln(2)}.$$

e) Compléter le code de la fonction *Scilab* fournie pour qu'elle permette de créer des simulations indépendantes de la loi de X :

```
function x=simulX(n)
    x=zeros(n,1);
    for i=1:n
        x(i,1)=log(1/2+1/2/rand());
    end;
endfunction
```

2. parce que $F_X(0) = 0 = \lim\limits_{x \to 0_-} F_X(x)$.
3. Elle n'est en fait pas dérivable en 1.
4. $f_X : \quad x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{2e^x}{(2e^x - 1)^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ en est une.

3. Soit B_1, B_2, X_1, X_2 quatre variables aléatoires indépendantes telles que B_1 et B_2 suivent la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$, et que X_1 et X_2 suivent la même loi que la variable X de la question précédente.
On pose :

$$\begin{cases} Y_1 = B_1X_1 + (1 - B_1)X_2 \\ Y_2 = B_1X_1 + B_2X_2 \end{cases}$$

a) Parmi les deux variables aléatoires Y_1 et Y_2, une seule est une variable à densité. Laquelle et pourquoi ?

Soit $x \in \mathbb{R}$.
Comme $P([B_1 = 1] \cap [Y_1 \leq x]) = P([B_1 = 1] \cap [X_1 \leq x]) = P([B_1 = 1])P([X_1 \leq x]$ et $P([B_1 = 0] \cap [Y_1 \leq x]) = P([B_1 = 0] \cap [X_2 \leq x]) = P([B_1 = 0])P([X_2 \leq x]$, on obtient par la formule des probabilités totales :

$$F_{Y_1}(x) = P([Y_1 \leq x]) = P([B_1 = 1])P([X_1 \leq x] + P([B_1 = 0])P([X_1 \leq x] = F_X(x) .$$

Par conséquent, Y_1 suit la même loi que X et elle admet une densité.

Quant à Y_2, elle n'admet pas de densité, parce que :

$$P([Y_2 = 0]) \geq P([B_1 = 0] \cap [B_2 = 0]) = \frac{1}{4} \cdot$$

Remarque : en fait, $P([Y_2 = 0]) = \frac{1}{4}$, mais c'est anecdotique.

b) Les deux variables aléatoires Y_1 et Y_2 ont-elles la même espérance ?

Oui, parce que $E(Y_1) = E(X) = \ln(2)$ et, par indépendance de B_1 et X_1 d'une part, de B_2 et X_2 d'autre part :

$$E(Y_2) = E(B_1)E(X_1) + E(B_2)E(X_2) = \frac{1}{2}E(X) + \frac{1}{2}E(X) = \ln(2) .$$

c) Proposer, pour chacune de ces deux variables, un script *Scilab* permettant d'en simuler une réalisation.

```
b1=grand(1,1,'bin',1,0.5); //simulation de B1
x1=simulX(1); //simulation de X1
x2=simulX(1); //simulation de X2
y1=b1*x1+(1-b1)*x2; simulation de Y1
y2=b1*x1+grand(1,1,'bin',1,0.5)*x2; simulation de Y2
```

Corrigé de l'exercice sans préparation

Pour tout nombre réel a, on note : $M(a) = \begin{pmatrix} a & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **Pour quelles valeurs de a la matrice $M(a)$ est-elle diagonalisable ?**

La matrice $M(a) - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} a-\lambda & a \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $\lambda(\lambda - a - 1)$ est différent de 0, puisqu'elle a le même rang que la matrice triangulaire

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda \\ 0 & a-(a-\lambda)(1-\lambda) \end{pmatrix}$$

obtenue par les deux opérations élémentaires $L_1 \leftrightarrow L_2$, puis $L_2 \leftarrow L_2 - (a-\lambda)L_1$.
Par conséquent : $\operatorname{Sp}(M(a)) = \{0, a+1\}$.

• Si $a \neq -1$, $M(a)$ est diagonalisable, puisque c'est une matrice carrée d'ordre 2 possédant deux valeurs propres distinctes.

• Si $a = -1$, la seule valeur propre de $M(a)$ est 0 et le sous-espace propre associé est de dimension 1. La matrice $M(-1)$ n'est donc pas diagonalisable, puisque la somme des dimensions de ses sous-espaces propres n'est pas égale à 2.

Finalement, $M(a)$ est diagonalisable si, et seulement si, a est différent de -1.

2. **Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, la matrice $M(a)$ est semblable à la matrice :**

$$N(a) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} .$$

La matrice $N(a)$ possède le même spectre que $M(a)$ (par un calcul similaire, ou toute autre méthode légale).

• Si $a \neq -1$, $M(a)$ et $N(a)$ sont semblables, parce qu'elles sont semblables à la même matrice diagonale :

$$D(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix} .$$

• Si $a = -1$, on note f l'endomorphisme dont $M(-1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} f(e_1) = -e_1 + e_2 \\ f(e_2) = -e_1 + e_2 \end{cases} .$$

Dès lors :

$$\begin{cases} f(e_1 - 2e_2) = e_1 - e_2 = (e_1 - 2e_2) + e_2 \\ f(e_2) = -e_1 + e_2 = -(e_1 - 2e_2) - e_2 \end{cases} .$$

La matrice de f dans la base $(e_1 - 2e_2, e_2)$ est donc $N(-1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Par conséquent $M(-1)$ et $N(-1)$ sont semblables.

EXERCICE PRINCIPAL

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est la matrice

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Question de cours.
   Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable.

2. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $N = M + 2I$.
   a) Quel est le rang de N ?
   b) En déduire une valeur propre de M et la dimension du sous-espace propre associé.
   c) Calculer N^2.
   d) Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de N et de M ?

3. a) À l'aide d'une propriété de M, justifier que f est diagonalisable.
   b) Quelles sont les valeurs propres de f ?
   c) Combien existe-t-il de matrices diagonales semblables à M ?
   d) Déterminer l'image de f.

4. Soit r un nombre réel strictement positif.
   On considère quatre suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & r\,(-u_n - v_n - w_n + t_n) \\ v_{n+1} & = & r\,(-u_n - v_n + w_n - t_n) \\ w_{n+1} & = & r\,(-u_n + v_n - w_n - t_n) \\ t_{n+1} & = & r\,(u_n - v_n - w_n - t_n) \end{array} \right.$$

   a) Vérifier que, pour tout entier $p \geq 0$, on a : $\begin{cases} M^{2p} = 4^p\, I \\ M^{2p+1} = 4^p\, M \end{cases}$.

   b) En déduire que si r est strictement inférieur à $1/2$, alors les quatre suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et de limite nulle.

   c) Dans quels autres cas, hormis celui où $u_0 = v_0 = w_0 = t_0 = 0$, les quatre suites sont-elles toutes les quatre convergentes ?

EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.
Pour tout $x > 0$, on pose :

$$f(x) = P([x < X < 2x]) .$$

1. a) Justifier la continuité de la fonction f sur $]0, +\infty[$.
   b) Trouver les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. a) Justifier l'existence d'une valeur maximale p pour la probabilité $P([x < X < 2x])$.
   b) Trouver a tel que $f(a) = p$.

Corrigé de l'exercice principal

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ est la matrice

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Question de Cours

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ soit diagonalisable.

Un endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à 4.

2. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $N = M + 2I$.

a) | Quel est le rang de N ? |
|---|

Le rang de la matrice $N = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ est égale à 1 puisque toutes ses colonnes sont colinéaires (et $N \neq 0$).

b) | En déduire une valeur propre de M et la dimension du sous-espace propre associé. |
|---|

Comme le rang de $M + 2I$ est égal à 1, -2 est une valeur propre de M et la dimension du sous-espace propre associé est égale à 3, par le théorème du rang.

c) | Calculer N^2. |
|---|

$$N^2 = \begin{bmatrix} 4 & -4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & -4 & 4 \end{bmatrix} = 4\,N\ .$$

Remarque

$$M^2 = (N - 2I)^2 = N^2 - 4\,N + 4\,I = 4\,I\ .$$

d) | Que peut-on en déduire concernant les valeurs propres de N et de M ? |
|---|

Comme $N^2 = 4N$, $X(X-4)$ est un polynôme annulateur de N. Les seules valeurs propres possibles de N sont 0 et 4. Outre -2, la seule valeur propre possible de M est 2.

3. a) À l'aide d'une propriété de M, justifier que f est diagonalisable.

Comme M est symétrique, elle est diagonalisable. Par conséquent, l'endomorphisme f est diagonalisable.

b) Quelles sont les valeurs propres de f ?

Les valeurs propres de f sont -2 et $+2$, puisque -2 ne peut pas être la seule valeur propre de f, sans quoi f ne serait pas diagonalisable.

c) Combien existe-t-il de matrices diagonales semblables à M ?

Exactement quatre :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

d) Déterminer l'image de f.

Comme 0 n'est pas valeur propre de f, f est bijectif. Son image est donc $\mathbb{R}^4$.

4. Soit r un nombre réel strictement positif.
On considère quatre suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= r\,(-u_n - v_n - w_n + t_n) \\ v_{n+1} &= r\,(-u_n - v_n + w_n - t_n) \\ w_{n+1} &= r\,(-u_n + v_n - w_n - t_n) \\ t_{n+1} &= r\,(u_n - v_n - w_n - t_n) \end{cases}$$

a) Vérifier que, pour tout entier $p \geq 0$, on a : $\begin{cases} M^{2p} = 4^p\, I \\ M^{2p+1} = 4^p\, M \end{cases}$.

On peut procéder par récurrence, grâce à l'égalité $M^2 = 4I$, qui provient par exemple de $N^2 = 4N$ (et qui a probablement été découverte à l'occasion de la question 2).

b) En déduire que si r est strictement inférieur à $1/2$, alors les quatre suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et de limite nulle.

5. On pose :

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \\ t_n \end{pmatrix}.$$

L'énoncé donne $X_{n+1} = rMX_n$, d'où on déduit : $X_n = r^n M^n X_0$.

Si $n = 2p$, on trouve $X_{2p} = r^{2p}\, 4^p\ X_0$.

Si $n = 2p + 1$, $X_{2p+1} = r^{2p+1}\, 4^p\ M\, X_0$.

Si $r < 1/2$, $r^{2p}\, 4^p$ et $r^{2p+1}\, 4^p$ tendent vers 0 quand p tend vers l'infini, et par conséquent les quatre suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et de limite nulle.

c) Dans quels autres cas, hormis celui où $u_0 = v_0 = w_0 = t_0 = 0$, les quatre suites sont-elles toutes les quatre convergentes ?

On suppose $X_0 \neq 0$.

• Si $r > 1/2$, $r^{2p}\, 4^p$ tend vers $+\infty$ quand p tend vers l'infini, et il est impossible que les quatre suites convergent.

• Si $r = 1/2$, les quatre suites sont toutes les quatre convergentes si, et seulement si $X_0 = rMX_0$, autrement dit si (u_0, v_0, w_0, t_0) est un vecteur propre de f associée à la valeur propre 2. Les quatre suites sont alors constantes.

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite. On notera Φ la fonction de répartition de X et φ sa dérivée.
Pour tout $x > 0$, on pose :

$$f(x) = P([x < X < 2x]) \ .$$

1. a) $\boxed{\text{Justifier la continuité de la fonction } f \text{ sur }]0, +\infty[.}$

Comme Φ est continue, en tant que fonction de répartition d'une variable à densité, la fonction $x \longmapsto \Phi(2x) - \Phi(x)$ est continue.

b) $\boxed{\text{Trouver les limites de } f \text{ en } 0 \text{ et en } +\infty.}$

- $\lim\limits_{x \to 0_+} f(x) = 0$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

2. a) $\boxed{\text{Justifier l'existence d'une valeur maximale } p \text{ pour la probabilité } P([x < X < 2x]).}$

$$f(1) = P([1 < X < 2]) > 0$$

Soit $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que :

$$\forall x \in]0, \varepsilon[, \quad f(x) < f(1) \ .$$

Soit $A > 1$ tel que :

$$\forall x > A, \quad f(x) < f(1) \ .$$

L'image du segment $[\varepsilon, A]$ par la fonction continue f est un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ et contenant le nombre $f(1)$. Son extrémité p est la valeur maximale de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) $\boxed{\text{Trouver } a \text{ tel que } f(a) = p.}$

La dérivée de f est donnée par :

$$f'(x) = 2\,\varphi(2x) - \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(2e^{-2x^2} - e^{-x^2} \right) .$$

$$f'(a) = 0 \Longleftrightarrow 2e^{-2a^2} = e^{-a^2/2} \Longleftrightarrow -2a^2 + \ln 2 > -\frac{a^2}{2} \Longleftrightarrow a = \sqrt{\frac{2 \ln 2}{3}}$$

EXERCICE PRINCIPAL

1. Question de cours.
   Quel est le lien entre la continuité d'une fonction et sa dérivabilité ?

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} x \ln |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   a) Justifier la continuité de g sur $\mathbb{R}$.
   b) En déduire que la fonction $h : x \longmapsto x\, g(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   c) La fonction h est-elle de classe C^2 sur $\mathbb{R}$?

3. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   On note F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions $f_0 : x \longmapsto 1$, $f_1 : x \longmapsto x$ et g :

$$F = \text{Vect}\,(f_0, f_1, g) \ .$$

   a) Pour toute fonction f de F, on note $\Phi(f)$ la fonction dérivée de la fonction $x \longmapsto x\, f(x)$. Montrer que Φ définit un endomorphisme de F.
   b) Prouver que la famille (f_0, f_1, g) est une base de F et trouver la matrice M de Φ dans cette base.

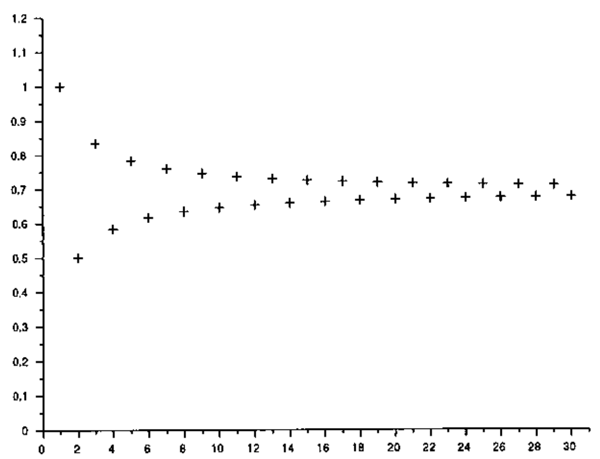
4. a) Montrer que M est une matrice inversible et déterminer son inverse.
   b) En déduire une primitive de la fonction g.
   c) Trouver une primitive de la fonction h.

Exercice sans préparation

Soit le programme Scilab suivant :

```
x = [1:30];
y = zeros(1,30);
eps = 1;
for k=1:30
y(k) = eps / k;
eps = eps*(-1);
end
z = cumsum(y);
plot2d(x,z,style=-1, rect=[0, 0, 31, 1.2])
```

Le graphe obtenu par l'exécution de ce programme est le suivant :



1. Préciser le contenu des variables y et z après l'exécution du programmme.
2. a) Ce graphe suggère que deux suites sont adjacentes. Lesquelles ?
   b) Démontrer cette conjecture.

Corrigé de l'exercice principal

1. Question de cours

$\boxed{\text{Quel est le lien entre la continuité d'une fonction et sa dérivabilité ?}}$

Toute fonction dérivable est continue.
Le jury n'omet pas de demander un contre-exemple pour la réciproque.

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \begin{cases} x \ln |x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) $\boxed{\text{Justifier la continuité de } g \text{ sur } \mathbb{R}.}$

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée de fonctions continues et, par « croissances comparées » :

$$\lim_{x \to 0} x \ln |x| = 0 = f(0) .$$

b) $\boxed{\text{En déduire que la fonction } h : x \longmapsto x\, g(x) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

• La fonction h est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ en tant que composée de fonctions de classe C^1 et, pour tout $x \neq 0$:

$$h'(x) = 2x \ln |x| + x .$$

• La fonction h est dérivable et de dérivéee nulle en 0 parce que :

$$\lim_{x \to 0-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = 0 .$$

Par conséquent, h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; h'(x) = 2g(x) + x .$$

Comme g est continue sur $\mathbb{R}$, h' aussi et h est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

c) $\boxed{\text{La fonction } h \text{ est-elle de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ ?}}$

Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{h'(x) - h'(0)}{x - 0} = \frac{2g(x) + x}{x} = 1 + 2 \ln |x|$$

qui tend vers $-\infty$ quand x tend vers 0.
La fonction h' n'étant pas dérivable en 0, h n'est pas de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

3. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et F le sous-espace vectoriel de E engendré par les fonctions $f_0 : x \longmapsto 1$, $f_1 : x \longmapsto x$ et g.

a) Pour toute fonction f de F, on note $\Phi(f)$ la fonction dérivée de la fonction $x \longmapsto x\, f(x)$.

Montrer que Φ définit un endomorphisme de F.

Les fonctions $h_0 : x \longmapsto xf_0(x) = x$, $h_1 : x \longmapsto xf_1(x) = x^2$ et h sont dérivables et leurs dérivées appartiennent à F, puisque :

$$\begin{cases} h_0' = f_0 \\ h_1' = 2f_1 \\ h' = f_1 + 2g \end{cases} .$$

Il en résulte que, pour toute fonction f de F, $\Phi(f)$ est un élément de F. Comme de plus Φ est linéaire, Φ est un endomorphisme de F.

b) Prouver que la famille (f_0, f_1, g) est une base de F et trouver la matrice M de Φ dans cette base.

Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \mu) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \mu g = 0_F$.
Comme $\lambda_0 f_0(0) + \lambda_1 f_1(0) + \mu g(0) = \lambda_0$, on a nécessairement : $\lambda_0 = 0$.
Comme $\lambda_1 f_1 + \mu g = 0_F$ et comme f_1 et 0_F sont dérivables en 0 alors que g ne l'est pas, on a nécessairement : $\mu = 0$.
Comme $\lambda_1 f_1 = 0_F$ et comme la fonction f_1 n'est pas identiquement nulle, on a aussi, nécessairement : $\lambda_1 = 0$.

Par conséquent, la famille (f_0, f_1, g) est libre. C'est donc une base de l'espace vectoriel F, dont elle est par définition une famille génératrice.

D'après les calculs faits en a, la matrice de Φ dans cette base est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} .$$

4. a) Montrer que M est une matrice inversible et déterminer son inverse.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

b) En déduire une primitive de la fonction g, puis de la fonction h.

$$\Phi^{-1}(g) = -\frac{1}{4}\, f_1 + \frac{1}{2}\, g$$

signifie que : $g = -\frac{1}{4}\, g_1' + \frac{1}{2}\, h'$.

Par conséquent, la fonction

$$-\frac{1}{4}\, g_1 + \frac{1}{2}\, h : x \longmapsto \begin{cases} -\frac{1}{4}\, x^2 + \frac{1}{2}\, x^2 \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est une primitive de g (sur $\mathbb{R}$).

c) $\boxed{\text{Trouver une primitive de la fonction } h.}$

Comme $g_1 + 3h : x \longmapsto \begin{cases} x^2 + 3x^2 \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ est la dérivée de la fonction

$$k : x \longmapsto \begin{cases} x^3 \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

une primitive de h (sur $\mathbb{R}$) est la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{3}\big(k(x) - \frac{x^3}{3}\big) = \begin{cases} -\frac{1}{9}x^3 + \frac{1}{3}x^3 \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} .$$

Corrigé de l'exercice sans préparation

Soit le programme Scilab suivant :

```
x = [1:30];
y = zeros(1,30);
eps = 1;
for k=1:30
y(k) = eps / k;
eps = eps*(-1);
end
z = cumsum(y);
plot2d(x,z,style=-1, rect=[0, 0, 31, 1.2])
```

1. Préciser le contenu des variables y et z après l'exécution du programmme.

Après exécution du progamme :

- y est un vecteur-ligne dont les 30 composantes sont données par :

$$\forall k \in [\![1,30]\!],\ y(k) = \frac{(-1)^{k-1}}{k}\ .$$

- z est un vecteur-ligne dont les 30 composantes sont données par :

$$\forall k \in [\![1,30]\!],\ z(k) = \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{i-1}}{i}\ .$$

2. a) Ce graphe suggère que deux suites sont adjacentes. Lesquelles ?

Le programme fournit une représentation graphique des trente points de coordonnées $\big(k, z(k)\big)$.[1]
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut noter :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i-1}}{i}\ .$$

D'après le graphe fourni, "il semble" que les suites $\left(S_{2n}\right)_{n\geq 1}$ et $\left(S_{2n+1}\right)_{n\geq 0}$ sont adjacentes.

b) Démontrer cette conjoncture.

Posons $u_n = S_{2n}$.

1. C'est l'affectation à la variable interne « style » d'une valeur négative ou nulle qui permet d'obtenir un tracé point par point.

$$u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} > 0$$

Bilan : la suite $(S_{2n})_{n\geq 1}$ est croissante.

Posons $v_n = S_{2n+1}$.

$$v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^{2n+4}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+2} = \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} < 0 .$$

Bilan : la suite $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ est décroissante.

$$u_n - v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = -\frac{(-1)^{2n+2}}{2n+1} = -\frac{1}{2n+1}$$

et donc :

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0 .$$

Conclusion : (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

EXERCICE PRINCIPAL

Deux joueurs A et B s'affrontent dans un jeu de la manière suivante :
A joue le premier et jette deux dés : si la somme des points obtenus est 5, A gagne.
Le jeu cesse alors.
Sinon, B joue à son tour et jette deux dés : si la somme des points obtenus est 7, B gagne.
Le jeu cesse alors.
Sinon, le tour revient à A et on poursuit comme ci-dessus jusqu'à ce que A ou B ait gagné.

1. Question de cours : formule des probabilités composées.

2. a) Déterminer la probabilité pour que la somme des points lors du jet de deux dés soit égale à 5.

   b) Déterminer la probabilité pour que la somme des points lors du jet de deux dés soit égale à 7.

3. a) Déterminer la probabilité pour que A gagne au $(2n+1)^{\text{ième}}$ jet des deux dés ($n \geq 0$).

   b) Déterminer la probabilité pour que B gagne au $(2n+2)^{\text{ième}}$ jet des deux dés ($n \geq 0$).

4. En déduire les probabilités a et b pour que A et B gagnent le jeu.

5. Soit N la variable aléatoire égale au nombre de jets de deux dés pour que le jeu s'arrête. Montrer que N admet une espérance et la déterminer.

EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. a) Donner le domaine de définition de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(2-t)}}$.

   b) Justifier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(2-t)}}\,\mathrm{d}t$.

2. L'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(t-2)}}\,\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?

CORRIGÉ DE L'EXERCICE PRINCIPAL

Deux joueurs A et B s'affrontent dans un jeu de la manière suivante :
A joue le premier et jette deux dés : si la somme des points obtenus est 5, A gagne.
Le jeu cesse alors.
Sinon, B joue à son tour et jette deux dés : si la somme des points obtenus est 7, B gagne.
Le jeu cesse alors.
Sinon, le tour revient à A et on poursuit comme ci-dessus jusqu'à ce que A ou B ait gagné.

1. Question de cours : formule des probabilités composées.

- Si $P(A) \neq 0$, $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$.
- Si $P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$ alors :

$$\boxed{P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2) \ldots P_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)}\,.$$

2. a) Déterminer la probabilité pour que la somme des points lors du jet de deux dés soit égale à 5.

En dénombrant les façons d'obtenir 5, nous avons $\boxed{P_5 = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}}$.

b) Déterminer la probabilité pour que la somme des points lors du jet de deux dés soit égale à 7.

De la même façon, on obtient : $\boxed{P_7 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}}$.

3. a) Déterminer la probabilité pour que A gagne au $(2n+1)^{\text{ième}}$ jet des deux dés ($n \geq 0$).

Pour tout entier n, on note A_{2n+1} l'événement « A gagne au $(2n+1)^{\text{ième}}$ jet des deux dés » et B_{2n+2} l'événement « B gagne au $(2n+2)^{\text{ième}}$ jet des deux dés ».

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$A_{2n+1} = \overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{2n}} \cap A_{2n+1}\,.$$

En utilisant la formule des probabilités composées :

$$P(A_{2n+1}) = P(\overline{A_1})P_{\overline{A_1}}(\overline{B_2}) \ldots P_{\overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{2n}}}(A_{2n+1})$$

$$P(A_{2n+1}) = (1-P_5)^n(1-P_7)^n P_5 = \frac{1}{9}\left(\frac{20}{27}\right)^n.$$

b) $\boxed{\text{Déterminer la probabilité pour que B gagne au } (2n+2)^{\text{ième}} \text{ jet des deux dés } (n \geq 0).}$

Avec les même notations, on a :

$$B_{2n+2} = \overline{A_1} \cap \overline{B_2} \cap ... \cap \overline{B_{2n}} \cap \overline{A_{2n+1}} \cap B_{2n+2}$$

En utilisant encore la formule des probabilités composées, on obtient :

$$P(B_{2n+2}) = (1 - P_5)^{n+1}(1 - P_7)^n P_7 = \frac{1}{27}\left(\frac{20}{27}\right)^n .$$

4. $\boxed{\text{En déduire les probabilités } a \text{ et } b \text{ pour que A et B gagnent le jeu.}}$

$$a = P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_{2k+1}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_{2k+1}) .$$

$$\boxed{a = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{20}{27}\right)^k = \frac{3}{7}} .$$

$$b = P\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_{2k+2}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(B_{2k+2}) .$$

$$\boxed{b = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{4}{27}\left(\frac{20}{27}\right)^k = \frac{4}{7}} .$$

5. $\boxed{\begin{array}{l}\text{Soit } N \text{ la variable aléatoire égale au nombre de jets de deux dés pour que le jeu s'arrête.}\\ \text{Montrer que } N \text{ admet une espérance et la déterminer.}\end{array}}$

$$(2n+1)P(N = 2n+1) = (2n+1)P(A_{2n+1}) = \frac{2n+1}{9}\left(\frac{20}{27}\right)^n$$

En reconnaissant des séries géométriques dérivées, on constate que la série $\sum(2n+1)P(N = 2n+1)$ est absolument convergente (ACV).
De même

$$(2n+2)P(N = 2n+2) = (2n+2)P(B_{2n+2}) = \frac{8n+8}{27}\left(\frac{20}{27}\right)^n$$

et la série $\sum(2n+2)P(N = 2n+2)$ est ACV, donc la série $\sum nP(N = n)$ l'est aussi, et N admet une espérance.

$$E(N) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{9}\left(\frac{20}{27}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{8n+8}{27}\left(\frac{20}{27}\right)^n$$

$$E(N) = \frac{14}{27}\sum_{n=0}^{+\infty} n\left(\frac{20}{27}\right)^n + \frac{11}{27}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{20}{27}\right)^n$$

$$\boxed{E(N) = \frac{40}{7} + \frac{11}{7} = \frac{51}{7}} .$$

CORRIGÉ DE L'EXERCICE SANS PRÉPARATION

1. a) $\boxed{\text{Donner le domaine de définition de la fonction } f : x \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(2-t)}}\,.}$

$$D_f = \,]1,2[\,.$$

b) $\boxed{\text{Justifier la convergence de l'intégrale impropre } \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(2-t)}}\,dt\,.}$

L'intégrale impropre $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(2-t)}}\,dt$ est convergente parce que :

- la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(2-t)}}$ est continue sur l'intervalle $]1,2[$
- l'intégrale $\displaystyle\int_1^{3/2} \frac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(2-t)}}\,dt$ est faussement impropre parce que $f(t)$ tend vers 1 quand $t \longrightarrow 1_+$
- $f(t) \sim \dfrac{\ln 2}{\sqrt{2-t}}$ quand $t \longrightarrow 2_-$ et l'intégrale de référence $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{2-t}}\,dt$ est (absolument) convergente.

2. $\boxed{\text{L'intégrale } \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(t-2)}}\,dt \text{ est-elle convergente ?}}$

L'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(t-2)}}\,dt$ est convergente parce que :

- la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(t-2)}}$ est continue sur l'intervalle $]2,+\infty[$
- l'intégrale $\displaystyle\int_2^3 \frac{\ln(t)}{\sqrt{(t-1)^2(t-2)}}\,dt$ est convergente parce que $f(t) \sim \dfrac{\ln 2}{\sqrt{t-2}}$ quand $t \longrightarrow 2_+$ et l'intégrale de référence $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{t-2}}\,dt$ est (absolument) convergente.
- $f(t) \sim \dfrac{\ln(t)}{t^{3/2}} = \circ(\dfrac{1}{t^{5/4}})$ quand $t \longrightarrow +\infty$ et l'intégrale de référence $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{t^{5/4}}\,dt$ est (absolument) convergente.