# HEC Paris - ESSEC BS 2019 - voie E

*Correction proposée par G. Dupont.*

## Exercice

1. (a) i. Un calcul matriciel direct donne :

$$\boxed{M = CL = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M^2 = 0_3.}$$

ii. On a

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(M) &= \operatorname{rg}\left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \dim \operatorname{Vect}\left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \right) \\ &= \dim \operatorname{Vect}\left( \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\operatorname{rg}(M) = 1.}$$

iii. On a $M^2 = 0$ donc $X^2$ est un polynôme annulateur de $M$. Il s'ensuit que la seule valeur propre possible pour $M$ est 0. En outre, $\operatorname{rg}(M) = 1$ donc $0 \in \operatorname{Sp}(M)$. Ainsi,

$$\operatorname{Sp}(M) = \{0\}.$$

Puisque $M$ admet une unique valeur propre et qu'elle n'est pas diagonale, il vient,

$$\boxed{M \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

(b) i. On a

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(P) &= \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{rg} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= 3. \end{aligned}$$

Ainsi, $\operatorname{rg}(P) = 3$ et donc

$$\boxed{P \text{ est inversible.}}$$

Un calcul direct donne

$$\boxed{P\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.}$$

ii. Soit $M=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{bmatrix}$. On a

$$M\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{bmatrix}a\\d\\g\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}.$$

Posons alors

$$R=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&0\\-1&0&0\end{bmatrix}.$$

C'est une matrice de rang 3, elle est donc inversible et il suit de la discussion précédente que

$$R^{-1}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}.$$

On pose donc

$$\boxed{Q={}^tR^{-1}=\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&-1\\-1&2&-1\end{bmatrix}.}$$

iii. On a

$$\begin{aligned}PMQ&=PCLQ\\&=PC[1,0,0]\\&=P\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&0\\2&0&0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{PMQ=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.}$$

2. (a) On propose les programmes suivants :

```
function B=addlig(b,i,j,A)
    [n,p] = size(A)
    B = A
    for k = 1:p
        B(i,k) = A(i,k)+b*A(j,k)
    end
endfunction
```

et

```
function B=echlig(i,j,A)
    [n,p] = size(A)
```

```
    B = A
    for k=1:p
        B(i,k) = A(j,k)
        B(j,k) = A(i,k)
    end
endfunction
```

(b) La matrice $D$ est une matrice diagonale avec des 1 partout sur la diagonale sauf à l'entrée $(i,i)$ qui vaut $a$. On sait alors (ou on le vérifie à l'aide de la formule du produit matriciel) que multiplier $A$ par $D$ à gauche (à droite, respectivement) revient à multiplier la $i$-ème ligne (colonne, respectivement) de $A$ par $a$.
Ainsi,

$$\boxed{\text{le programme } \texttt{multligmat} \text{ effectue bien l'opération } L_i \leftarrow aL_i.}$$

3. (a) i. Si on note $L_1, \ldots, L_n$ les lignes de $M$, on a $\mathrm{rg}(M) = 1$ donc toutes les lignes sont colinéaires et il en existe au moins une non nulle. Autrement dit, il existe $i_0 \in [\![1,n]\!]$ tel que $L_{i_0} \neq 0$ et, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, il existe $c_i \in \mathbf{R}$ tel que $L_i = c_i L_{i_0}$. Posons alors $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$ et $L = L_{i_0}$. Alors

$$\boxed{CL = \begin{bmatrix} c_1 L_{i_0} \\ c_2 L_{i_0} \\ \vdots \\ c_n L_{i_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix} = M.}$$

ii. On a

$$\begin{aligned} MC &= CLC \\ &= C\left(\sum_{i=1}^{n} \ell_i c_i\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} \ell_i c_i\right) C \end{aligned}$$

et $C \neq 0$ donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \ell_i c_i \in \mathrm{Sp}(M).}$$

iii. $\mathrm{rg}(M) = 1$ donc $0 \in \mathrm{Sp}(M)$ et $\dim E_0(M) = n - \mathrm{rg}(M) = n - 1$.
Posons $\sigma = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \ell_i c_i$. Si $\sigma \neq 0$, on a $\dim E_\sigma(M) \geq 1$ et donc, puisque la somme des dimensions des espaces propres ne peut excéder $n$, on a

$$\dim E_0(M) + \dim E_\sigma(M) = n.$$

Ainsi,

$$\boxed{M \text{ est diagonalisable.}}$$

(b) i. Le sujet semble vouloir nous orienter vers un argument calculatoire alors qu'un argument conceptuel général est à portée de main et semble plus éclairant, nous privilégierons donc cette seconde approche.
Soit $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbf{R}^n$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(f) = M$.
Puisque $f$ est non-nul, il existe $u_1 \in \mathbf{R}^n$ tel que $f(u_1) \neq 0$. Soit $(u_2, \ldots, u_n)$ une base de $\ker(f)$, alors

$$\mathcal{B}_1 = (u_1, \ldots, u_n)$$

est une base de $\mathbf{R}^n$ (on vérifie facilement qu'elle est libre et elle a le bon nombre de vecteurs). Posons $v_1 = f(u_1) \neq 0$ et complétons $v_1$ en une base

$$\mathcal{B}_2 = (v_1, \ldots, v_n)$$

de $\mathbf{R}^n$.
Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = E_{1,1}.$$

Autrement dit, si on pose $P = P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_0}$ et $Q = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_2}$, on a

$$\boxed{PMQ = E_{1,1}.}$$

ii. On reprend la construction précédente, en posant

$$\mathcal{B}_1' = (u_2, \ldots, u_{j-1}, u_1, u_{j+1}, \ldots, u_n),$$

$$\mathcal{B}_2' = (v_2, \ldots, v_{i-1}, v_1, v_{i+1}, \ldots, v_n),$$

$$P_i = P_{\mathcal{B}_1',\mathcal{B}_0} \quad \text{et} \quad Q_j = P_{\mathcal{B}_0,\mathcal{B}_2'}.$$

Alors,

$$\boxed{P_iMQ_j = E_{i,j}.}$$

---

# Problème

## Partie I. Fonction génératrice des moments de variables aléatoires discrètes

1. (a) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, il suit du théorème de transfert que

$$M_X(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{kt} \mathbf{P}\left(X = k\right).$$

Or, pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$, $t \mapsto e^{kt}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}$. Ainsi, par combinaison linéaire,

$$\boxed{M_X \text{ est } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbf{R}.}$$

(b) Pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$, on montre par une récurrence immédiate sur $p$ que la dérivée $p$-ème de $t \mapsto e^{kt}$ est $t \mapsto k^p e^{kt}$. Ainsi, par somme,

$$M_X^{(p)}(t) = \sum_{k=-n}^{n} k^p e^{kt} \mathbf{P}\left(X = k\right)$$

et donc, d'après le théorème de transfert,

$$\boxed{M_X^{(p)}(0) = \sum_{k=-n}^{n} k^p \mathbf{P}\left(X = k\right) = \mathbf{E}\left[X^p\right].}$$

(c) i. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} G_X(e^t) &= \sum_{k=0}^{2n} \mathbf{P}\left(X = k - n\right) e^{kt} \\ &= \sum_{\substack{j=-n \\ (j=k-n)}}^{n} \mathbf{P}\left(X = j\right) e^{(j+n)t} \\ &= e^{nt} \sum_{j=-n}^{n} \mathbf{P}\left(X = j\right) e^{jt} \\ &= e^{nt} M_X(t). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}, \quad G_X(e^t) = e^{nt} M_X(t).}$$

ii. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a $M_X(t) = M_Y(t)$ donc, d'après la question précédente,

$$G_X(e^t) = e^{nt} M_X(t) = e^{nt} M_Y(t) = G_Y(e^t).$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}, \quad G_X(e^t) = G_Y(e^t).}$$

iii. D'après la question précédente, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\sum_{k=0}^{2n} \mathbf{P}\left(X = k - n\right) e^{kt} = \sum_{k=0}^{2n} \mathbf{P}\left(Y = k - n\right) e^{kt}.$$

Or les fonctions $t \mapsto e^{kt}$ pour $k \in [\![0, 2n]\!]$ sont linéairement indépendantes (on peut le vérifier « à la main » ou observer que chaque fonction $t \mapsto e^{kt}$ est vecteur propre associé à la valeur propre $k$ pour l'application linéaire $\delta : f \mapsto f'$ et invoquer le fait qu'une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes deux à deux est toujours libre).

Ainsi, on peut identifier les coefficients dans les deux membres et il s'ensuit que

$$\forall k \in [\![0, 2n]\!], \quad \mathbf{P}(X = k - n) = \mathbf{P}(Y = k - n)$$

et donc, en posant $j = k - n$, on a

$$\forall k \in [\![-n, n]\!], \quad \mathbf{P}(X = j) = \mathbf{P}(Y = j).$$

Ainsi,

$$\boxed{X \text{ et } Y \text{ suivent la même loi.}}$$

2. (a) i. $S(\Omega) = \{-1, 1\}$ et $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ donc, par produit,

$$\boxed{Y_2(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\} = [\![-2, 2]\!].}$$

ii. Dressons le tableau croisé des valeurs de $Y_2$ en fonction des valeurs de $S$ et de $X_2$.

| $S$ \ $X_2$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| -1 | 0 | -1 | -2 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y_2 = -2) &= \mathbf{P}(S = -1, X_2 = 2)\\ &= \mathbf{P}(S = -1)\,\mathbf{P}(X_2 = 2)\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\\ &= \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Y_2 = -1) &= \frac{1}{4},\\ \mathbf{P}(Y_2 = 0) &= \frac{1}{4},\\ \mathbf{P}(Y_2 = 1) &= \frac{1}{4},\\ \mathbf{P}(Y_2 = 2) &= \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

En résumé :

| $y$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{P}(Y_2 = y)$ | $1/8$ | $1/4$ | $1/4$ | $1/4$ | $1/8$ |

(b) Dressons le tableau croisé des valeurs de $X_2 - (S + 1)$ en fonction des valeurs de $S$ et de $X_2$.

| $S$ \ $X_2$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| -1 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | -2 | -1 | 0 |

Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X_2 - (S + 1) = -2) &= \mathbf{P}(S = 1, X_2 = 0)\\ &= \mathbf{P}(S = 1)\,\mathbf{P}(X_2 = 0)\\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{4}\\ &= \frac{1}{8}.\end{aligned}$$

De même, on calcule les autres probabilités et on obtient :

| $y$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathbf{P}\left(X_2-(S+1)=y\right)$ | $1/8$ | $1/4$ | $1/4$ | $1/4$ | $1/8$ |

3. (a) `X` contient une matrice à $n$ lignes et 2 colonnes de simulations de $X_2$.
`S` contient une matrice à $n$ lignes et 2 colonnes de simulations de $S$.

(b) Chaque ligne de `Z1` contient une simulation du couple $(SX_2, X_2-(S+1))$.
Chaque ligne de `Z2` contient une simulation du couple $(SX_2, X_2'-(S'+1))$ où $X_2'$ et $S'$ sont des variables aléatoires de même loi que $X_2$ et $S$ respectivement et indépendantes de ces variables.

(c) D'après la loi faible des grands nombres,

$$\texttt{p1}\approx \mathbf{P}\left(SX_2=X_2-(S+1)\right)$$

et

$$\texttt{p2}\approx \mathbf{P}\left(SX_2=X_2'-(S'+1)\right).$$

Or, comme on l'observe aisément à partir des tableaux croisés,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(SX_2=X_2-(S+1)\right)&=\mathbf{P}\left(X_2=0,S=-1\right)\\&=\mathbf{P}\left(X_2=0\right)\mathbf{P}\left(S=-1\right)\\&=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{8}\end{aligned}$$

et, d'autre part, si on pose $Y_2'=X_2'-(S'+1)$ qui est donc indépendante et de même loi que $Y_2$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(SX_2=X_2'-(S'+1)\right)&=\mathbf{P}\left(Y_2=Y_2'\right)\\&=\sum_{k=-n}^{n}\mathbf{P}\left(Y_2=k,Y_2'=k\right)\\&=\sum_{k=-n}^{n}\mathbf{P}\left(Y_2=k\right)^2\\&=\left(\frac{1}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{8}\right)^2\\&=\frac{7}{32}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\texttt{p1}\approx\frac{1}{8}\quad\text{et}\quad\texttt{p2}\approx\frac{7}{32}.}$$

*Remarque :* Une exécution du script Scilab proposé a renvoyé `p1 = 0.1244` et `p2 = 0.21921` alors que $\frac{1}{8}=0.125$ et $\frac{7}{32}=0.21875$. Ces observations sont donc bien en accord avec nos résultats (ouf !).

4. (a) Pour tout $t\in\mathbf{R}$, on $e^{tX_n}$ prend un nombre fini de valeurs donc admet une espérance, ce qui prouve que $M_{X_n}(t)$ est défini pour tout $t\in\mathbf{R}$. En outre, avec $p=q=\frac{1}{2}$, on a

$$\begin{aligned}M_{X_n}(t)&=\sum_{k=0}^{n}e^{kt}\mathbf{P}\left(X_n=k\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}e^{kt}\binom{n}{k}p^kq^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pe^t)^kq^{n-k}\end{aligned}$$

$$= (q + pe^t)^n$$
$$= \frac{1 + e^t}{2^n}.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}, \quad M_{X_n}(t) = \frac{1+e^t}{2^n}.}$$

(b) Soit $t \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned}
M_{Y_n}(t) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{kt}\mathbf{P}\left(Y_n = k\right) \\
&= \sum_{k=-n}^{n} e^{kt}\left(\mathbf{P}\left(Y_n = k, S = -1\right) + \mathbf{P}\left(Y_n = k, S = 1\right)\right) \\
&= \sum_{k=-n}^{n} e^{kt}\left(\mathbf{P}\left(X_n = -k, S = -1\right) + \mathbf{P}\left(X_n = k, S = 1\right)\right) \\
&= \sum_{k=-n}^{0} e^{kt}\mathbf{P}\left(X_n = -k, S = -1\right) + \sum_{k=0}^{n} e^{kt}\mathbf{P}\left(X_n = k, S = 1\right) \\
&= \sum_{k=-n}^{0} \frac{e^{kt}}{2}\mathbf{P}\left(X_n = -k\right) + \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{kt}}{2}\mathbf{P}\left(X_n = k\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{-kt}}{2}\mathbf{P}\left(X_n = k\right) + \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{kt}}{2}\mathbf{P}\left(X_n = k\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(M_X(-t) + M_X(t)\right) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}\left((1+e^{-t})^n + (1+e^t)^n\right).
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{M_{Y_n}(t) = \frac{1}{2^{n+1}}\left((1+e^{-t})^n + (1+e^t)^n\right).}$$

(c) On a, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}
M_{Y_n}(t) &= \frac{1}{2^{n+1}}\left[e^{-nt}(1+e^t)^n + (1+e^t)^n\right] \\
&= \frac{1}{2^{n+1}}(1+e^t)^n\left[1 + e^{-nt}\right] \\
&= M_{X_n}(t) \times \frac{1+e^{-nt}}{2}.
\end{aligned}$$

Considérons alors une variable aléatoire $H_n$ indépendante de $X_n$ et de loi uniforme sur $\{0, n\}$. On a donc

$$M_{H_n}(t) = \frac{1+e^{nt}}{2}.$$

Mais alors

$$\begin{aligned}
M_{X_n - H_n}(t) &= \mathbf{E}\left[e^{t(X_n - H_n)}\right] \\
&= \mathbf{E}\left[e^{tX_n}e^{-tH_n}\right] \\
&= \mathbf{E}\left[e^{tX_n}\right]\mathbf{E}\left[e^{-tH_n}\right] \quad \text{(par indépendance)} \\
&= M_{X_n}(t)M_{H_n}(-t)
\end{aligned}$$

$$= M_{X_n}(t) \times \frac{1+e^{-nt}}{2}$$
$$= M_{Y_n}(t).$$

Ainsi, $Y_n$ et $X_n - H_n$ ont la même fonction génératrice des moments et en outre $(X_n - H_n)(\Omega) = [\![-n, n]\!] = Y_n(\Omega)$ de sorte qu'il suit de 1.c que

$$\boxed{Y_n \text{ et } X_n - H_n \text{ ont la même loi.}}$$

## Partie II. Propriétés générales des fonctions génératrices des cumulants et quelques exemples

5. (a) On a $K_X(0) = \ln(M_X(0))$ mais
$$M_X(0) = \mathbf{E}\left[e^{0X}\right] = \mathbf{E}[1] = 1.$$
Ainsi,
$$\boxed{K_X(0) = 0.}$$

(b) Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. On a, pour tout $t$ tel que $at \in D_X$,
$$\begin{aligned} K_Y(t) &= \ln(M_Y(t)) \\ &= \ln(\mathbf{E}\left[e^{tY}\right]) \\ &= \ln(\mathbf{E}\left[e^{atX+tb}\right]) \\ &= \ln(e^{tb}\mathbf{E}\left[e^{atX}\right]) \\ &= tb + \ln(M_X(at)) \\ &= tb + K_X(at). \end{aligned}$$
Ainsi,
$$\boxed{K_{aX+b}(t) = tb + K_X(at).}$$

(c) Si $X$ et $-X$ ont la même loi, on a $K_X = K_{-X}$ mais, pour tout $t$, on a $K_{-X}(t) = \mathbf{E}\left[e^{t(-X)}\right] = \mathbf{E}\left[e^{-tX}\right] = K_X(-t)$ et donc $K_X$ est paire.
Or on sait que la dérivée d'une fonction paire (respectivement impaire) est une fonction impaire (respectivement paire). Ainsi, par une récurrence immédiate, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $K_X^{(2p+1)}$ est impaire et donc en particulier
$$\boxed{Q_{2k+1}(X) = K_X^{(2k+1)}(0) = 0.}$$

6. (a) Soit $t \in \mathcal{D}_X \cap \mathcal{D}_Y$. Puisque $X$ et $Y$ sont indépendantes, il suit du lemme des coalitions que $e^{tX}$ et $e^{tY}$ le sont aussi. Alors,
$$\begin{aligned} K_{X+Y}(t) &= \ln(M_{X+Y}(t)) \\ &= \ln(\mathbf{E}\left[e^{t(X+Y)}\right]) \\ &= \ln(\mathbf{E}\left[e^{tX}e^{tY}\right]) \\ &= \ln(\mathbf{E}\left[e^{tX}\right]\mathbf{E}\left[e^{tY}\right]) \quad \text{(par indépendance)} \\ &= \ln(M_X(t)) + \ln(M_Y(t)) \\ &= K_X(t) + K_Y(t). \end{aligned}$$
Ainsi,
$$\boxed{K_{X+Y} = K_X + K_Y.}$$

(b) Par linéarité de la dérivation, on a, pour tout $p \in \mathbf{N}^*$,

$$K_{X+Y}^{(p)} = K_X^{(p)} + K_Y^{(p)}.$$

En évaluant en 0, on obtient

$$\boxed{\forall p \in \mathbf{N}^*, Q_p(X+Y) = Q_p(X) + Q_p(Y).}$$

7. (a) Soit $t \in \mathbf{R}$. On a

$$\begin{aligned}
M_U(t) &= \mathbf{E}\left[e^{tU}\right] \\
&= \int_0^1 e^{tu}\, du \quad \text{(théorème de transfert)} \\
&= \begin{cases} \left[\dfrac{e^{tu}}{t}\right]_0^1 & \text{si} \quad t \neq 0 \\ \int_0^1 du & \text{si} \quad t = 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{e^t - 1}{t} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}, \quad M_U(t) = \begin{cases} \dfrac{e^t - 1}{t} & \text{si} \quad t \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad t = 0. \end{cases}}$$

(b) La fonction $M_U$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ comme quotient de fonctions dérivables, le dénominateur ne s'annulant pas. Alors

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}^*, \quad M_U'(t) = \frac{te^t - e^t + 1}{t^2}.}$$

(c) Soit $t \neq 0$. Alors, en procédant à un développement limité en 0, on a

$$\begin{aligned}
\frac{M_U(t) - 1}{t} &= \frac{1}{t}\left(\frac{e^t - 1}{t} - 1\right) \\
&= \frac{1}{t^2}(e^t - (1+t)) \\
&= \frac{1}{t^2}\left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2) - (1+t)\right) \\
&= \frac{1}{2} + o(1)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{M_U'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{M_U(t) - 1}{t} = \frac{1}{2}.}$$

(d) $M_U'$ est continue sur $\mathbf{R}_-^*$ et sur $\mathbf{R}_+^*$ comme quotient de fonctions continues, le dénominateur ne s'annulant pas. En outre, si $t \neq 0$,

$$M_U'(t) = \frac{te^t - e^t + 1}{t^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{t(1+t+o(t)) - (1+t+t^2/2+o(t^2)) + 1}{t^2} \\
&= \frac{t+t^2-1-t-t^2/2+o(t^2)) + 1}{t^2} \\
&= \frac{t^2/2}{t^2} + o(1) \\
&\xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{2} = M_U'(0).
\end{aligned}$$

Il suit alors du théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ que

$$\boxed{M_U \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbf{R}.}$$

8. Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels tels que $\alpha < \beta$.

   (a) Puisque $U \rightsquigarrow \mathcal{U}([0,1])$, on a $(\beta-\alpha)U + \alpha \rightsquigarrow \mathcal{U}([\alpha,\beta])$. Ainsi, il suit du 5.b que

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}, \quad K_X(t) = K_{(\beta-\alpha)U+\alpha}(t) = \alpha t + K_U((\beta-\alpha)t).}$$

   (b) Puisque $M_U$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$ et à valeurs strictement positives (ce que l'on vérifie par une rapide disjonction de cas), $K_U = \ln \circ M_U$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbf{R}$. Il suit alors de la question précédente que, par composition et somme avec des fonctions affines,

$$\boxed{K_X \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbf{R}.}$$

   En outre, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$K_X'(t) = \alpha + (\beta-\alpha)K_U'((\beta-\alpha)t)$$

   de sorte que

$$\begin{aligned}
Q_1(X) &= K_X'(0) \\
&= \alpha + (\beta-\alpha)K_U'(0) \\
&= \alpha + (\beta-\alpha)\frac{M_U'(0)}{M_U(0)} \\
&= \alpha + (\beta-\alpha)\frac{1/2}{1} \quad \text{(d'après 7)} \\
&= \alpha + (\beta-\alpha)\mathbf{E}[U] \\
&= \mathbf{E}[\alpha + (\beta-\alpha)U] \\
&= \mathbf{E}[X].
\end{aligned}$$

   On a donc bien,

$$\boxed{Q_1(X) = \mathbf{E}[X].}$$

9. Soit un réel $\lambda > 0$ et soit $T$ une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda$.

   (a) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}
M_T(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{kt} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda e^t)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} \exp(\lambda e^t)
\end{aligned}$$

$$= \exp(\lambda(e^t - 1)).$$

et

$$\begin{aligned} K_T(t) &= \ln(M_T(t)) \\ &= \lambda(e^t - 1). \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}, \quad M_T(t) = \exp(\lambda(e^t - 1)) \quad \text{et} \quad K_T(t) = \lambda(e^t - 1).}$$

(b) On montre par une récurrence immédiate sur $p \in \mathbf{N}^*$ que

$$\forall p \in \mathbf{N}^*, \quad K_T^{(p)}(t) = \lambda e^t$$

de sorte que

$$\boxed{\forall p \in \mathbf{N}^*, \quad Q_p(T) = K_T^{(p)}(0) = \lambda.}$$

10. Soit $Z$ une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.

(a) Soit $t \in \mathbf{R}$. La fonction $x \mapsto e^{tx - \frac{x^2}{2}}$ est continue et positive sur $\mathbf{R}$ donc intégrable sur tout segment. En particulier, $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{tx - \frac{x^2}{2}}\, dx$ converge.

Par ailleurs,

$$e^{tx - \frac{x^2}{2}} = \underset{x \to \pm\infty}{o}\left(e^{-\frac{x^2}{4}}\right) = \underset{x \to \pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Puisque les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\, dx$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx$ convergent, il suit du théorème de comparaison que les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} e^{tx - \frac{x^2}{2}}\, dx$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} e^{tx - \frac{x^2}{2}}\, dx$ convergent.

Il s'ensuit que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx - \frac{x^2}{2}}\, dx \text{ converge.}}$$

(b) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx - x^2/2}\, dx \end{aligned}$$

qui est une intégrale convergente d'après la question précédente, de sorte que $M_Z$ est définie sur $\mathbf{R}$. Alors, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx - x^2/2}\, dx \\ &= e^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2 + tx - x^2/2}\, dx \\ &= e^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2}\, dx \\ &= e^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\, dx \quad (\text{C.V. : } u = x - t) \\ &= e^{t^2/2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}, \quad M_Z(t) = e^{t^2/2}.}$$

(c) Soit $m \in \mathbf{R}$, $\sigma \in \mathbf{R}_+^*$, $N \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $Z \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$. Alors $\sigma Z + m \rightsquigarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et donc, pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} K_N(t) &= K_{\sigma Z + m}(t) \\ &= mt + K_Z(\sigma t) \quad \text{(d'après 5.b)} \\ &= mt + \ln(\exp(\frac{\sigma^2 t^2}{2})) \quad \text{(d'après 10.b)} \\ &= mt + \frac{\sigma^2 t^2}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$K_N'(t) = m + \sigma^2 t, \quad K_N''(t) = \sigma^2 \quad \text{et} \quad \forall p \geq 3, \quad K_N^{(p)}(t) = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall p \in \mathbf{N}^*, \quad Q_p(N) = \begin{cases} m & \text{si} \quad p = 1 \\ \sigma^2 & \text{si} \quad p = 2 \\ 0 & \text{si} \quad p \geq 3. \end{cases}}$$

11. Soit $(T_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telles que, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, la variable aléatoire $T_n$ suit la loi de Poisson de paramètre $n$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $W_n = \dfrac{T_n - n}{\sqrt{n}}$.

(a) Considérons $(X_1, \ldots, X_n)$ un $n$-échantillon de variables aléatoires de loi $\mathcal{P}(1)$, chaque variable aléatoire a donc une espérance égale à 1 et une variance égale à 1 également. D'après le théorème de stabilité pour la loi de Poisson, on a

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \rightsquigarrow \mathcal{P}(n)$$

et donc, d'après le théorème de la limite centrée, on a

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Puisque $T_n$ et $S_n$ ont la même loi, si on considère $W$ une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$, on a donc

$$\boxed{W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} W.}$$

(b) Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned} M_{W_n}(t) &= \mathbf{E}\left[e^{t\left(\frac{T_n - n}{\sqrt{n}}\right)}\right] \\ &= e^{-\sqrt{n}t}\mathbf{E}\left[e^{t\left(\frac{T_n}{\sqrt{n}}\right)}\right] \\ &= e^{-\sqrt{n}} M_{T_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, donc

$$\begin{aligned} K_{W_n}(t) &= \ln(M_{W_n}(t) \\ &= -\sqrt{n} + K_{T_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \\ &= -\sqrt{n} + n(e^{t/\sqrt{n}} - 1) \quad \text{(d'après 9.a)}. \end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall t \in \mathbf{R}, \quad K_{W_n}(t) = -\sqrt{n} + n(e^{t/\sqrt{n}} - 1).}$$

(c) Si on pose $u = \frac{t}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on peut utiliser le développement limité $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + o(u^2)$ et on obtient

$$e^{t/\sqrt{n}} = 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{t^2}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

et donc

$$n(e^{t/\sqrt{n}} - 1) = \sqrt{n}t + \frac{t^2}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(()\, 1\right)$$

et donc

$$K_{W_n}(t) = \frac{t^2}{2} + \underset{n\to+\infty}{o}(1),$$

et donc, d'après 10.b,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} K_{W_n}(t) = \frac{t^2}{2} = K_W(t).}$$

## Partie III. Cumulant d'ordre 4.

12. On a

$$Q_1(X) = K_X'(0) = \frac{M_X'(0)}{M_X(0)} = \frac{\mathbf{E}[X]}{1} = \mathbf{E}[X]$$

et

$$Q_2(X) = K_X''(0) = \frac{M_X''(0)M_X(0) - M_X'(0)^2}{M_X(0)^2} = \frac{\mathbf{E}\left[X^2\right] \times 1 - \mathbf{E}[X]^2}{1^2} = \mathbf{V}(X).$$

Ainsi, on a bien

$$\boxed{Q_1(X) = \mathbf{E}[X] \quad \text{et} \quad Q_2(X) = \mathbf{V}(X).}$$

13. Soient $X_1$ et $X_2$ deux variables aléatoires indépendantes et de même loi que $X$. On pose $S = X_1 - X_2$.

(a) On a

$$S^4 = (X_1 - X_2)^4 = X_1^4 - 4X_1^3X_2 + 6X_1^2X_2^2 - 4X_1X_2^3 + X_2^4$$

donc, comme $X_1$ et $X_2$ sont indépendantes et de même loi que $X$, on a

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[S^4\right] &= \mathbf{E}\left[X_1^4\right] - 4\mathbf{E}\left[X_1^3\right]\mathbf{E}[X_2] + 6\mathbf{E}\left[X_1^2\right]\mathbf{E}\left[X_2^2\right] - 4\mathbf{E}[X_1]\mathbf{E}\left[X_2^3\right] + \mathbf{E}\left[X_2^4\right] \\ &= \mathbf{E}\left[X^4\right] - 8\mathbf{E}\left[X^3\right]\mathbf{E}[X] + 6\mathbf{E}\left[X^2\right]^2.\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$(X - \mathbf{E}[X])^4 = X^4 - 4X^3\mathbf{E}[X] + 6X^2\mathbf{E}[X]^2 - 4X\mathbf{E}[X]^3 + \mathbf{E}[X]^4$$

donc

$$\mu_4(X) = \mathbf{E}\left[X^4\right] - 4\mathbf{E}\left[X^3\right]\mathbf{E}[X] + 6\mathbf{E}\left[X^2\right]\mathbf{E}[X]^2 - 4\mathbf{E}[X]\mathbf{E}[X]^3 + \mathbf{E}[X]^4$$

et donc

$$2\mu_4(X) = 2\mathbf{E}\left[X^4\right] - 8\mathbf{E}\left[X^3\right]\mathbf{E}[X] + 12\mathbf{E}\left[X^2\right]\mathbf{E}[X]^2 - 6\mathbf{E}[X]^4.$$

Enfin,

$$\mathbf{V}(X)^2 = (\mathbf{E}\left[X^2\right] - \mathbf{E}[X]^2)^2 = \mathbf{E}\left[X^2\right]^2 - 2\mathbf{E}\left[X^2\right]\mathbf{E}[X]^2 + \mathbf{E}[X]^4$$

de sorte que

$$6\mathbf{V}(X)^2 = 6\mathbf{E}\left[X^2\right]^2 - 12\mathbf{E}\left[X^2\right]\mathbf{E}[X]^2 + 6\mathbf{E}[X]^4.$$

Ainsi, en effectuant la différence

$$\begin{aligned}2\mu_4(X) + 6\mathbf{V}(X)^2 &= 2\mathbf{E}\left[X^4\right] - 8\mathbf{E}[X]\mathbf{E}\left[X^3\right] + 6\mathbf{E}\left[X^2\right]^2 \\ &= \mathbf{E}\left[S^4\right].\end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{\mathbf{E}\left[S^4\right] = 2\mu_4(X) + 6\mathbf{V}\left(X\right)^2.}$$

(b) On a $M_S = e^{K_S}$ donc
$$M_S' = K_S' e^{K_S} = K_S' M_S.$$

Alors,
$$M_S^{(4)} = (M_S')^{(3)} = (K_S' M_S)^{(3)}$$

et d'après la formule de Leibniz
$$\boxed{M_S^{(4)} = K_S^{(4)} M_S + 3K_S^{(3)} M_S' + 3K_S'' M_S'' + K_S' M_S^{(3)}.}$$

(c) En évaluant en 0 l'égalité précédente, on a
$$\begin{aligned} M_S^{(4)}(0) &= K_S^{(4)}(0) M_S(0) + 3K_S^{(3)}(0) M_S'(0) + 3K_S''(0) M_S''(0) + K_S'(0) M_S^{(3)}(0) \\ &= Q_4(S) + 3Q_3(S) M_S'(0) + 3Q_2(S) M_S''(0) + Q_1(S) M_S^{(3)}(0). \end{aligned}$$

Mais, pour tout $t \in \mathbf{R}$,
$$K_S(t) = K_{X_1 - X_2}(t) = K_{X_1}(t) + K_{-X_2}(t) = K_X(t) + K_X(-t)$$

de sorte que $K_S$ est paire et donc $K_S'$ et $K_S^{(3)}$ sont impaires. Ainsi, $Q_1(S) = Q_3(S) = 0$. Il s'ensuit que
$$M_S^{(4)}(0) = Q_4(S) + 3Q_2(S) M_S''(0).$$

Par ailleurs, pour tout $t \in \mathbf{R}$,
$$M_S(t) = M_{X_1 - X_2}(t) = M_{X_1}(t) M_{X_2}(-t) = M_X(t) M_X(-t)$$

de sorte que
$$M_S''(t) = M_X''(t) M_X(-t) - 2M_X'(t) M_X'(-t) + M_X(t) M_X''(-t)$$

et donc
$$\begin{aligned} M_S''(0) &= M_X''(0) M_X(0) - 2M_X'(0)^2 + M_X(0) M_X''(0) \\ &= \mathbf{E}\left[X^2\right] - 2\mathbf{E}\left[X\right]^2 + \mathbf{E}\left[X^2\right] \\ &= 2\mathbf{E}\left[X^2\right] - 2\mathbf{E}\left[X\right]^2 \\ &= 2\mathbf{V}\left(X\right) \\ &= \mathbf{V}\left(S\right). \end{aligned}$$

Ainsi,
$$M_S^{(4)}(0) = Q_4(S) + 3Q_2(S)\mathbf{V}\left(S\right)$$

mais comme $K_S(t) = K_X(t) + K_X(-t)$, il vient
$$Q_2(S) = 2Q_2(X) = 2\mathbf{V}\left(X\right) = \mathbf{V}\left(S\right)$$

et donc
$$M_S^{(4)}(0) = Q_4(S) + 3\mathbf{V}\left(S\right)^2.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que $M_S^{(4)} = \mathbf{E}\left[S^4\right]$. Pour cela, on part de l'identité, pour tout $t \in \mathbf{R}$,
$$M_S(t) = M_X(t) M_X(-t)$$

que l'on dérive quatre fois à l'aide de la formule de Leibniz :
$$M_S^{(4)}(t) = M_X^{(4)}(t) M_X(-t) - 4M_X^{(3)}(t) M_X'(-t) + 6M_X''(t) M_X''(-t) - 4M_X'(t) M_X^{(3)}(-t) + M_X(t) M_X^{(4)}(-t).$$

En évaluant en 0, on obtient ainsi,
$$M_S^{(4)}(0) = M_X^{(4)}(0) M_X(0) - 4M_X^{(3)}(0) M_X'(0) + 6M_X''(0) M_X''(0) - 4M_X'(0) M_X^{(3)}(0) + M_X(0) M_X^{(4)}(0)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{E}\left[X^4\right] - 4\mathbf{E}\left[X^3\right]\mathbf{E}\left[X\right] + 6\mathbf{E}\left[X^2\right]^2 - 4\mathbf{E}\left[X\right]\mathbf{E}\left[X^3\right] + \mathbf{E}\left[X^4\right] \\
&= 2\mathbf{E}\left[X^4\right] - 8\mathbf{E}\left[X\right]\mathbf{E}\left[X^3\right] + 6\mathbf{E}\left[X^2\right]^2 \\
&= \mathbf{E}\left[S^4\right].
\end{aligned}
$$

En conclusion [1], on a bien

$$\boxed{\mathbf{E}\left[S^4\right] = Q_4(S) + 3\mathbf{V}\left(S\right)^2.}$$

14. En recoupant 13.a et 13.c, puisque $\mathbf{V}\left(S\right) = 2\mathbf{V}\left(X\right)$ et $Q_4(S) = 2Q_4(X)$, on a

$$
\begin{aligned}
Q_4(S) + 3\mathbf{V}\left(S\right)^2 = 2\mu_4(X) + 6\mathbf{V}\left(X\right)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad 2Q_4(X) + 12\mathbf{V}\left(X\right)^2 = 2\mu_4(X) + 6\mathbf{V}\left(X\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad 2Q_4(X) = 2\mu_4(X) - 6\mathbf{V}\left(X\right)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad Q_4(X) = \mu_4(X) - 3\mathbf{V}\left(X\right)^2.
\end{aligned}
$$

Ainsi, on a bien

$$\boxed{Q_4(X) = \mu_4(X) - 3\mathbf{V}\left(X\right)^2.}$$

1. avec tout de même l'impression d'avoir fait un long détour et loupé un chemin plus direct...