ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

T.P. n°1

Suites et représentations graphiques: révisions
20/09 & 03/10

Exercice 1.

(1) Rappeler les DL à l'ordre 1 et 2 de $\ln(1+x)$ en 0.
(2) Que fait le programme suivant? Réécrire les lignes (7) et (8) en remplaçant `plot2d()` par `plot()`.

```
(1) function y=f(x)
(2)     y=log(x+1)
(3) endfunction

(4) function y=g(x)
(5)     y=x-x^2/2
(6) endfunction

(7) x=-1.01:.01:1 ; y=feval(x,f); z=feval(x,g);
(8) plot2d(x, [y',x',z'])
```

Exercice 2. (Suites à récurrence linéaire d'ordre 2). On considère la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad \text{et} \quad u_{n+2} = \frac{7}{2}u_{n+1} - \frac{3}{2}u_n.$$

(1) Compléter la fonction `SciLab` suivante afin qu'elle renvoie le terme général u_n en fonction de n

```
function res=U(n)
    Uold=.....
    Unew=.....
    for i=.......
        aux=.....
        Uold=.....
        Unew=.....
    end
    res=.....
endfunction
```

(2) Le graphique suivant représente les termes de la suite (z_n) définie par $z_n = u_n/3^n$, pour $0 \leq n \leq 50$.

(a) Par lecture graphique, déterminer un équivalent de u_n.
(b) Quelle est l'expression du terme général de (u_n)?

Exercice 3. On considère la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0} \frac{1}{4^k+\ln(k+1)+1}$.

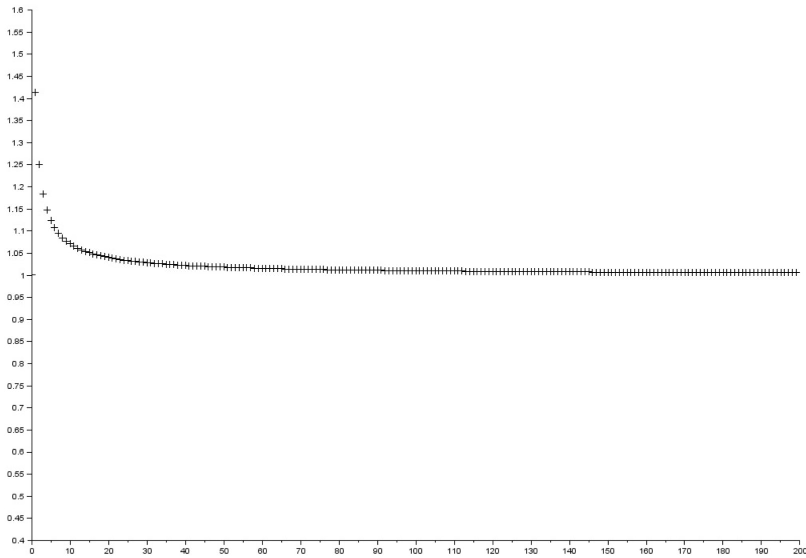
(1) Donner un équivalent du terme général de la série.
(2) Justifier que cette série converge. On note S sa somme.
(3) On souhaite déterminer une valeur approchée de S.
  (a) Montrer que :
$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k+\ln(k)+1} - S\right| \leq \frac{1}{3\times 4^n}.$$
  (b) Écrire une fonction `SciLab`, d'entête `y=S_approx(eps)` prenant en paramètre un réel `eps` et renvoyant une valeur approchée de S à `eps` près.

Exercice 4. On considère une suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 = 1$ et pour tout entier n,
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}.$$

(1) Écrire un programme en `SciLab` qui calcule et affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n au clavier.
☞ *Pour $n = 100$, on trouve $u_{100} = 14.284064$.*
(2) Écrire une fonction en `SciLab` prenant comme paramètre un entier n et renvoyant la valeur de u_n.
(3) Écrire une fonction en `SciLab` prenant comme paramètre un entier n et renvoyant toutes les valeurs de u_0 à u_n rangées dans un vecteur.
(4) Écrire un programme en `SciLab` permettant de déterminer et d'afficher le plus petit entier naturel n pour lequel $u_n \geq 100$.
☞ *On trouve $n = 4998$.*
(5) On considère le programme `SciLab` suivant et la figure associée

```
u=1 ;
eq=[1]
for i=1:200
    u=(u+1/u) ;
    eq=[eq,u/sqrt(2*i)]
end

plot2d([0:200],eq,-1,rect=[0,0.4,200,1.6]);
```



(a) Que contient la variable `eq` en fin de boucle ?
(b) Conjecturer alors un équivalent de la suite (u_n) en $+\infty$ ainsi que la limite.
(c) Montrer que la suite (u_n) diverge effectivement vers $+\infty$.
On montrera que la suite est croissante et non majorée.

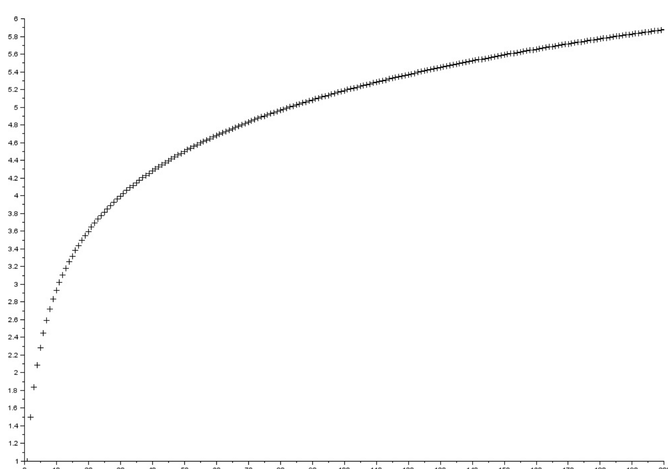
Exercice 5. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

On rappelle[1] que : $H_n \sim \ln(n)$.

(1) Écrire un programme en `SciLab` qui demande un valeur A à l'utilisateur et qui renvoie la plus petite valeur de n pour laquelle $H_n > A$. *Pour $A = 10$, on obtient $n = 12367$.*
(2)

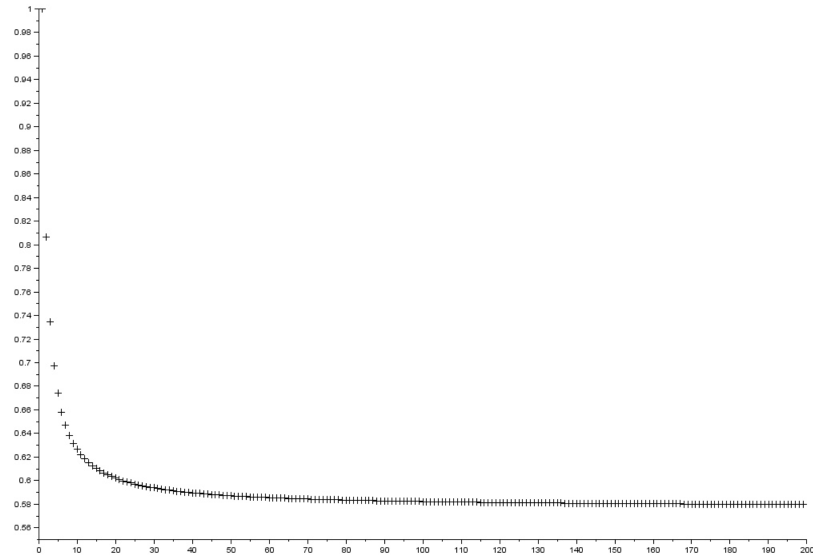
Écrire un programme en `SciLab` qui demande un valeur N à l'utilisateur et trace un graphique contenant en abscisses les entiers $k \in [\![1; N]\!]$ et en ordonnées les valeurs de H_k correspondantes.
Pour $N = 200$, on obtient le graphique suivant



[1] C'est une exercice classique, voir ECRICOME 2018 ou DM n°6, ECE 1 2015/2015

(3) On considère le programme suivant et le graphique associé :

```
n=200
S=0 ;
g=[] ;
for i=1:n
    S=S+1/i ;
    g=[g,S-log(i)] ;
end
plot2d([2:n],g,-1);
```



(a) Que contient la variable `g` en fin de boucle ? Que semble indiquer le graphique ?

(b) On admet qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que : $\quad S_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.
Commenter le graphique au vu de ce résultat.

(c) Donner une valeur approchée de γ.

(4) On ne résiste pas à l'envie de faire redémontrer le résultat classique $H_n \sim \ln(n)$.

(a) Montrer que, pour tout $k \geq 2$,

$$\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 + \ln(n+1) - \ln(2) \leq H_n \leq \ln(n) + 1.$$

(c) Conclure.

Exercice 6. (***Extrait de **ESSEC II 2016**) On considère la suite (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_n = u_{n-1}p_1 + u_{n-2}p_2 + \dots + u_0 p_n.$$

Sous `SciLab`, soit `P=[`$p_1, \dots, p_n$`]` le vecteur ligne tel que `P(j)=`p_j (pour $j \in [\![1;n]\!]$). Écrire un programme qui calcule u_n à partir de `P`. *On propose deux méthodes.*

Méthode 1: à compléter

```
U=zeros(1, n+1)
U(1)=1
for k=1:n
    for j=1:k
        U(k+1)=...............
    end
end
disp(.................)
```

Méthode 2: à comprendre

```
U=zeros(1, n+1)
U(1)=1
for k=1:n
    U(k+1)=U(1:k)*P(k:-1:1)'
end
disp(U(n+1))
```