



## T.P. n°3

*Statistiques descriptives bivariées*

☞ *Mots-clés: covariance empirique, droite de régression*

Un investisseur ayant nouvellement fait fortune se prend l'envie de boursicoter. Souhaitant naïvement réaliser une bonne diversification de son portefeuille boursier, celui-ci souhaite sélectionner des actifs qu'il estimera peu *corrélés*, espérant ainsi *réduire le risque* de son portefeuille.

Il récupère sur les sites dédiés (Boursorama, ABCBourse, BFM) les cours de clôture de différents titres: Société Générale (SG), AirFrance KLM (AFKLM) et BNP Paribas, pour chacun des 23 jours d'ouverture de la Bourse de Paris que comptait le mois d'octobre 2018, ici reproduits.

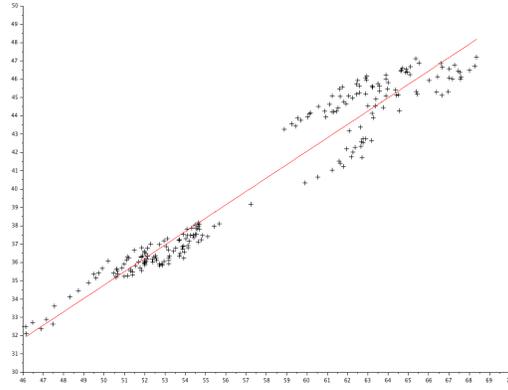
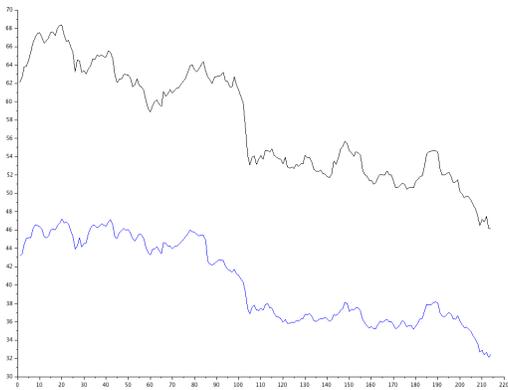
Date	AF KLM - cours de clôture (euros)	SG - cours de clôture (euros)	BNP - cours de clôture (euros)
01/10/18	8,614	36,595	51,99
02/10/18	8,43	36,54	51,98
03/10/18	8,584	36,755	52,14
04/10/18	8,64	37,00	52,30
05/10/18	8,442	36,81	51,85
08/10/18	8,394	36,295	51,15
09/10/18	8,83	36,25	51,23
10/10/18	8,482	36,65	51,47
11/10/18	7,994	36,07	50,19
12/10/18	8,224	35,66	49,915
15/10/18	7,956	35,34	49,50
16/10/18	7,982	35,41	49,72
17/10/18	8,09	35,145	49,60
18/10/18	8,478	34,895	49,225
19/10/18	8,224	34,45	48,725
22/10/18	8,146	34,09	48,305
23/10/18	8,022	33,60	47,56
24/10/18	8,20	32,705	46,46
25/10/18	8,366	32,885	47,155
26/10/18	8,366	32,37	46,88
29/10/18	8,404	32,63	47,475
30/10/18	8,492	32,11	46,145
31/10/18	8,56	32,48	46,13

Afin d'éviter au lecteur d'avoir à retaper toutes les données dans SciLab, celles-ci sont fournies dans un document joint:

- La série statistique X correspond aux cours successifs du titre de *Air France KLM*;
- La série statistique Y correspond aux cours successifs du titre de *Société Générale*;
- La série statistique Z correspond aux cours successifs du titre de *BNP Paribas*.

- (1) Représenter sur un même graphique l'évolution de ces cours au mois d'octobre pour les titres des deux banques. Que semble-t-on observer?
- (2) On cherche à mesurer la corrélation linéaire de  $Y$  et  $Z$ .
  - (a) Représenter le nuage de points associé au couple de séries statistiques  $(Y, Z)$ . On représentera de manière différente le **point moyen** du nuage. Commenter.
  - (b) Calculer les variances empiriques de  $Y$  et  $Z$ , puis la covariance empirique puis enfin le coefficient de corrélation linéaire empirique  $\rho_{Y,Z}$ . Commenter.
  - (c) Déterminer l'équation de la droite de régression et la représenter en superposition du nuage de points.
- (3) Faire la même étude comparative pour  $X$  et  $Y$ .

On ne résiste pas à l'envie de présenter les mêmes graphiques mais pour la période du 1er Janvier au 31 Octobre 2018.



On trouve  $\rho_{Y,Z} = 0.9725222$ .

## Support et bla bla théorique

On appelle **nuage de points** associé à la série statistique  $(X, Y)$  l'ensemble des points  $M_k$  de coordonnées  $(x_k, y_k)$  (pour  $1 \leq k \leq n$ ) tracés dans un repère orthonormé du plan (où  $X = (x_k)$  et  $Y = (y_k)$ ).

L'examen du nuage de points permet de faire des constatations qualitatives:

- est-il concentré ou dispersé?
- relève-t-on une tendance?
- y a-t-il des valeurs *a priori* aberrantes?

Le **point moyen** du nuage est le point de coordonnées  $(\bar{x}, \bar{y})$ , où  $\bar{x}$  désigne la moyenne empirique des  $x_k$  et  $\bar{y}$  celle des  $y_k$ :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k.$$

☞ On utilise la fonction `plot2d()` pour représenter le nuage de points ainsi que le point moyen (que l'on différencie).

☞ Les variances et covariance empiriques du couple sont définies par

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2, \quad \text{cov}(X, Y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}).$$

☞ La commande `corr(x,y,1)` renvoie également la covariance du couple  $(x,y)$ . En particulier, `corr(x,x,1)` permet d'obtenir la variance de  $x$ .

On se place dans la situation où l'on souhaite savoir si la "courbe" de  $Y$  en fonction de  $X$  peut être *approximée* par une droite. On cherche donc deux constantes  $a$  et  $b$  telles que

$$Y = aX + b + \varepsilon.$$

**Théorème 1.** Soit  $\rho$  le coefficient de corrélation linéaire du couple  $(x,y)$ . Alors

- (i)  $\rho \in [-1; 1]$ ;
- (ii)  $\rho = \pm 1$  si et seulement si la régression  $Y = aX + b$  est exacte.

☞ Par conséquent, si  $|\rho|$  est proche de 1 et qu'on a visualisé une relation linéaire entre les données, on peut confirmer qu'il y a bien corrélation linéaire entre  $X$  et  $Y$ .

☞ En sciences humaines et en sciences économiques, une valeur de  $|\rho|$  de l'ordre de 0,85 est souvent considérée comme bonne.

On utilise alors la *méthode des moindres carrés* qui nous donne l'équation de la droite la plus proche des points en terme de distance, c'est à dire l'unique droite  $D$  d'équation  $y = ax + b$  qui rend minimale la somme des carrés des erreurs d'ajustement

$$d^2(a,b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2.$$

Le résultat suivant donne la valeur de  $a$  et  $b$  et est admis. Sa démonstration repose sur des outils d'*algèbre bilinéaire* non accessibles avec le programme d'ECE (la série statistique  $aX + b\mathbf{1}$  est le projeté orthogonal de  $Y$  sur le plan de  $\mathbb{R}^n$  engendré par  $X$  et  $\mathbf{1}$  pour le produit scalaire  $\langle X, Y \rangle = E(XY)$ ).

**Théorème 2.** La droite la plus proche du nuage de points associé au couple  $(x,y)$  est la droite d'équation  $y = ax + b$  avec

$$a = \frac{\text{cov}(x,y)}{V(x)}, \quad \text{et} \quad b = \bar{y} - a \times \bar{x}.$$

En particulier, cette droite passe par le point moyen  $(\bar{x}, \bar{y})$ .

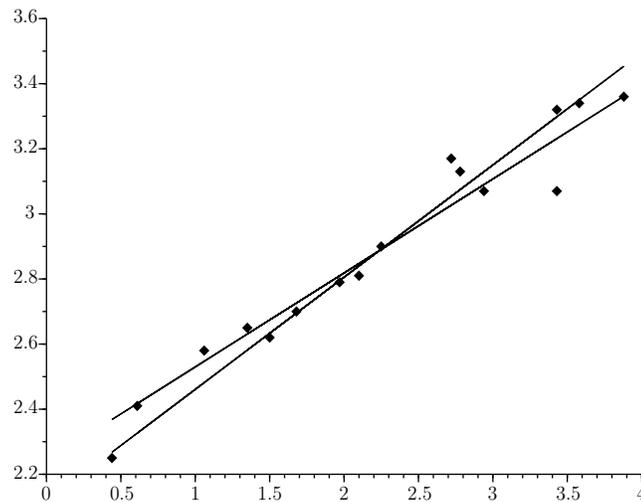
## Un exercice d'annale - HEC 2016

On rappelle qu'en SciLab, si  $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(w_i)_{1 \leq i \leq n}$  sont deux séries statistiques, alors la variance de  $(v_i)_{1 \leq i \leq n}$  est calculable par la commande `variance(v)` et la covariance de  $(v_i, w_i)_{1 \leq i \leq n}$  est calculable par `corr(v,w,1)`.

- (1) On a relevé pour  $n = 16$  entreprises qui produisent le bien considéré à l'époque donnée, les deux séries statistiques  $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$  et  $(t_i)_{1 \leq i \leq n}$  reproduites dans les lignes (1) et (2) du code SciLab suivant dont la ligne (5) est incomplète :

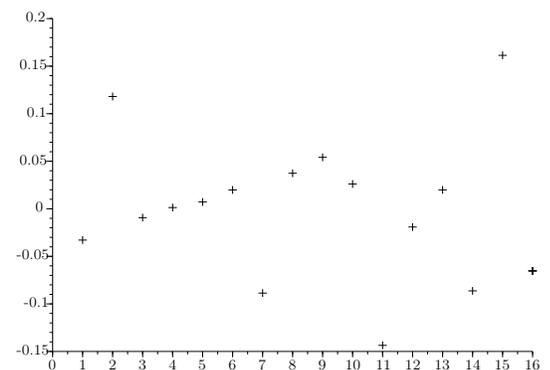
```
(1) u=[1.06,0.44,2.25,3.88,0.61,1.97,3.43,2.10,1.50,1.68,2.72,1.35,2.94,2.78,3.43
,3.58]
(2) t=[2.58,2.25,2.90,3.36,2.41,2.79,3.32,2.81,2.62,2.70,3.17,2.65,3.07,3.13,3.07
,3.34]
(3) plot2d(u,t,-4) // -4 signifie que les points sont représentés par des
losanges.
(4) plot2d(u,corr(u,t,1)/variance(u)*u+mean(t)-corr(u,t,1)/variance(u)*mean(u))
// équation de la droite de régression de t en u.
(5) plot2d(u,.....)
// équation de la droite de régression de u en t.
```

Le code précédent complété par la ligne (5) donne alors la figure suivante :



- Compléter la ligne (5) du code permettant d'obtenir la figure précédente.
- Interpréter le point d'intersection des deux droites de régression.
- Estimer graphiquement les moyennes empiriques  $\bar{u}$  et  $\bar{t}$ .
- Le coefficient de corrélation empirique de la série statistique double  $(u_i, t_i)_{1 \leq i \leq 16}$  est-il plus proche de -1, de 1 ou de 0 ?
- On reprend les lignes (1) et (2) du code précédent que l'on complète par les instructions (6) à (11) qui suivent et on obtient le graphique ci-dessous :

```
(6) a0=corr(u,t,1)/variance(u)
(7) b0=mean(t)-corr(u,t,1)/variance
(u)*mean(u)
(8) t0=a0*u+b0
(9) e=t0-t
(10) p=1:16
(11) plot2d(p,e,-1)
```



Que représente ce graphique ? Quelle valeur peut-on conjecturer pour la moyenne des ordonnées des 16 points obtenus sur le graphique ? Déterminer mathématiquement la valeur de cette moyenne.