ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

T.P. n°8

Méthode de Monte-Carlo
Intervalles de confiance

Le terme *méthode de Monte-Carlo* désigne toute méthode visant à calculer une valeur numérique en utilisant des procédés aléatoires, c'est-à-dire des techniques probabilistes.

Notamment, la méthode de Monte-Carlo est souvent utilisée pour déterminer une valeur approchée d'une intégrale (difficile) à calculer. Pour ce faire, on agit comme suit :

- on fait apparaître l'intégrale en question sous la forme d'une espérance (penser au théorème de transfert);
- on approche cette espérance à l'aide de la loi forte des grands nombres, par l'estimateur $T_n = \overline{X}_n$, pour n *assez grand*.

Si la LFGN garantit la convergence, elle ne permet d'en mesurer la rapidité. On assortit généralement le procédé ci-dessus d'une quantification des garanties d'approximation fournie par le Théorème Central Limite (TCL pour les intimes).

Exercice 1. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$ et $g:\ x \mapsto \ln(x)^2$.

(1) Montrer, à l'aide de deux intégrations par partie, que $g(X)$ admet une espérance et que
$$E(g(X)) = \int_0^1 (\ln(t))^2 \mathrm{d}t.$$

(2) Compléter le programme ci-dessous pour qu'il renvoie une *estimation* de l'intégrale ci-dessus.

```
function y=g(x)
    y=......................
endfunction

function T=est_m(n)
    obs=....................
    T=mean(g(obs))
endfunction
```

(3) Tester 8 fois cette fonction avec $n = 10^2$, puis avec $n = 10^3$. Commenter les résultats.

(4) (a) Soit $(X_1, ..., X_n)$ un $n-$échantillon d'une loi X d'espérance m et de variance σ^2. Rappeler comment obtenir un intervalle de confiance asymptotique de risque α pour m à partir de l'observation de $\overline{X}_n$.

(b) Montrer que $g(X)$ admet une variance et que
$$\sigma(g(X)) = \sqrt{20}.$$

(c) On *rappelle* qu'on peut obtenir $\Phi\left(1-\alpha/2\right)$ via l'instruction

```
cdfnor('X', 0, 1, 1-alpha/2, alpha/2).
```

En déduire la précision des intervalles de confiance obtenus par le TCL dans le cas `n_1=10^ 2` et `n_3=10^ 3` avec `alpha = 0.05`.

Exercice 2. On considère l'intégrale
$$I = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}.$$

(1) Vérifier que $I = E(g(U))$, où $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$.
(2) Donner une estimation de l'intégrale I ci-dessous à l'aide de la méthode de Monte-Carlo (on prendra un échantillon de taille 1000).
(3) Donner un intervalle de confiance asymptotique à 95% pour I.

Exercice 3. (Extrait de **HEC 2015**) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$F(x) = \exp\left(e^{-\lambda x}\right).$$

(1) Justifier que F est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]0,1[$.
(2) En déduire que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire T admettant une densité f_T, continue sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera; on dit que T *suit la loi de Gumbel de paramètre* λ.
(3) Établir l'existence de l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T.
(4) On pose: $Z = -\frac{1}{\lambda}\ln(\lambda X)$. Montrer que les variables aléatoires Z et T sont de même loi.
(5) Justifier l'égalité
$$E(T) = -\frac{1}{\lambda}\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\ln t\,\mathrm{d}t.$$
(6) À l'aide de la concavité de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, établir l'inégalité: $E(T) \geq 0$.
(7) On suppose dans cette question que $\lambda = 1$.

(a) Expliciter la bijection réciproque G de la fonction F.
(b) On considère le programme `Scilab` suivant:

```
x=linspace(-2,2,400)
y=(exp(-exp(-x)))
plot(x,y)
plot(y,x)
```

(i) Le réel 0 fait-il partie des nombres renvoyés par la commande `x=linspace(-2,2,400)`?
(ii) Quel sera le résultat de l'exécution de ce programme?

(c) Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0,1[$.
(d) Quelle est la loi de la variable aléatoire $G(U)$?
(e) Établir l'inégalité: $E(T) \leq 1$.
(f) Par une méthode de votre choix, écrire en `Scilab` les commandes qui permettent de simuler la loi de T.
(g) Écrire en `Scilab` les commandes qui permettent de renvoyer une valeur numérique approchée de $E(T)$ en utilisant la méthode de Monte-Carlo.

Exercice 4. (D'après **ESM Oral 2016**) Pour $x > 0$, on pose
$$f(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\mathrm{d}t.$$

(1) Vérifier que, pour tout $x > 0$, on a $f(x) + f(x+1) = \dfrac{1}{x+1}$.
(2) Donner le sens de variations de f.
(3) (a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.
(b) Déterminer un équivalent simple de $f(x)$, lorsque $x \to +\infty$, obtenu en encadrant $f(x)$.
(4) Écrire un programme `SciLab`, utilisant la méthode de Monte-Carlo, permettant d'obtenir une valeur approchée de $f(5)$.