ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Approfondissement

Comparaisons de suites et de fonctions

Exercice 1. (Extrait de **ESSEC 2008**) Soit p un paramètre, élément de $[0;1]$. On pose, pour tout $x \in [0,1[\,,\ f(x) = p\ln(1+x) + (1-p)\ln(1-x)$.

(1) **Étude de f.**

(a) Étudier les variations de f sur $]0,1[$, et montrer que f est concave.
Montrer que f admet un maximum sur $]0,1[$, atteint en un unique réel α_K que l'on exprimera en fonction de p.
(b) Déterminer la limite de f en 1.
(c) Montrer que f s'annule deux fois exactement sur $[0,1[$: en 0 et en un réel α_c vérifiant $\alpha_K < \alpha_c$.
(d) Donner l'allure de la courbe représentative de f sur $[0,1[$.

☞ On considèrera dans ce qui suit que α, est une fonction de p (on écrira ainsi $\alpha_c(p)$).

(2) On définit la fonction φ sur $]0,1[$ par $\varphi(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.
(a) Montrer que φ est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0,1]$ On notera encore φ ce prolongement.
(b) Justifier que φ est dérivable sur $]0,1[$, et mettre l'expression de sa dérivée sous la forme

$$\varphi'(x) = \frac{h(x)}{(1-x^2)\left[\ln(1-x)\right]^2}.$$

(c) Déterminer les variations de h sur $]0,1[$.
(d) Montrer que φ réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle à préciser.

(3) Montrer que φ est dérivable en 0 et que $\varphi'(0) = 1$.
(4) (a) Établir que

$$\forall p \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[, \quad \alpha_c(p) = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

(b) En déduire que α_c, est prolongeable par continuité en $\frac{1}{2}$, que ce prolongement est dérivable en $\frac{1}{2}$ et que :

$$\alpha_c'\left(\frac{1}{2}\right) = 4.$$

(c) Montrer que

$$\alpha_c \underset{p \to \frac{1}{2}}{\sim} 2\alpha_K.$$

Exercice 2. (D'après **ESCP 1996**) On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(1)=1 \quad \text{et} \quad f(x)=\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{\ln(x)}{2} \quad \text{si} \quad x\neq 1.$$

(1) Montrer que f est une fonction continue sur $]0,+\infty[$.
(2) Calculer la dérivée f' de f sur les intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.
Étudier son signe et en déduire que f est monotone sur chacun de ces deux intervalles.
(3) Montrer que pour tout x strictement positif et différent de 1, la dérivée f' de f vérifie :

$$f'(x)=\frac{(x-1)-\ln(x)}{(x-1)^2}-\frac{1}{2x}.$$

(4) Montrer que f est dérivable au point 1 et que $f'(1)=0$.
(5) Montrer que f' est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
(6) Montrer que, pour tout $x>1$, on a : $\ln(x)<(x-1)$. En déduire que, pour tout $x>1$, on a : $f(x)<x$.
(7) Donner la représentation graphique de la fonction f .
(8) Soit a un réel strictement supérieur à 1.
On considère la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ définie par $x_0=a$ et, pour tout entier $n\geq 0$, $x_{n+1}=f(x_n)$.
  (a) Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est bien définie et que pour tout $n\geq 0$, $x_n>1$.
  (b) Montrer que cette suite est décroissante et qu'elle admet une limite ℓ que l'on précisera.
(9) On se propose d'étudier la vitesse avec laquelle la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ tend vers ℓ.
  (a) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n\geq n_0$:

$$|f(x_n)-\ell|\leqslant\frac{1}{3}|x_n-\ell|.$$

  (b) En déduire que la suite $(x_n-\ell)_{n\geq 0}$ est négligeable devant la suite $(1/2^n)_{n\geq 0}$

Exercice 3. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x)=e^{-e^{-x}}$.
(1) (a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et préciser sa dérivée, notée f.
  (b) Montrer que f admet un maximum atteint en un point d'abscisse x_0.
  (c) Que représente pour la fonction F le point $(x_0,F(x_0))$?
(2) On considère la fonction F_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $F_n(x)=\begin{cases}\left(1-\frac{1}{n}e^{-x}\right)^n & \text{si } x\geq -\ln(n)\\ 0 & \text{si } x<-\ln(n)\end{cases}$.
  (a) Étudier la continuité de la fonction F_n.
  (b) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}, \lim_{n\to+\infty}F_n(x)=F(x)$.

Exercice 4. (Court extrait de **HEC 2015**). Soient $\lambda>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On pose, pour $x\in\mathbb{R}$,

$$f_n(x)=\begin{cases} n\lambda e^{-\lambda x}\left(1-e^{-\lambda x}\right)^{n-1}, & \text{si } x>0,\\ 0, & \text{sinon}\end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $f_n(x)=o\left(\frac{1}{x^3}\right)$, $\qquad x\to+\infty$.

Exercice 5. Soit $\gamma>0$. Le but de l'exercice est de montrer que $e^{\gamma n}=o(n!)$. Pour cela, on pose $u_n=e^{\gamma n}$ et $v_n=n!$.
(1) Montrer qu'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geq N$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq\frac{1}{2}\times\frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

(2) En déduire qu'il existe une constante $C>0$, telle que, pour tout $n\geq N$, on a

$$u_n\leq C\left(\frac{1}{2}\right)^{n-N}v_n.$$

(3) Conclure.