Chapitre 0. Révisions.

On propose, pour attaquer cette rentrée du meilleur pied, de consacrer les premières séances à des révisions - sous forme d'exercices accessibles pour tou.te.s - balayant (sans exhaustivité) le programme du cours de première année. Les questions ou exercices précédés de (*) nécessitent un peu plus d'effort.

1 Calculs

Exercice 1 (Récurrences)**.** Démontrer par récurrence les résultats suivants.

(1) Soient A, D et P trois matrices telles que : $A = PDP^{-1}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = PD^nP^{-1}.$$

(2) Montrer que $\forall n \geqslant 1, \quad J^n = 4^{n-1}J$ où

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} kk! = (n+1)! - 1.$$

(4) Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels. Montrer que : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \exp(x_k) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$.

(5) Montrer que : $\quad \forall n \geq 3, \; n! \geq 2 \times 3^{n-2}$.

(6) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a^k} = \frac{a^{n+1} - (n+1)a + n}{(a-1)^2 a^n}, \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}.$$

(7) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \, \forall p \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k} = \binom{p+n+1}{n}.$$

(8) (*) On définit la suite (u_n) par $u_1 = 1$ et

$$u_{n+1} = 1 + \frac{n}{u_n}.$$

Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que $\sqrt{n} < u_n < \sqrt{n} + 1$. (On pourra utiliser également la quantité conjuguée.)

Exercice 2 (Calculs de sommes)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} k(2k^2-1) = \frac{n(n+1)(n^2+n-1)}{2}.$$

(2) Montrer que
$$\sum_{k=2}^{2n} k + 2^k = n(2n+1) + 2^{2n+1} - 5.$$

(3) Montrer que
$$\sum_{k=n+1}^{2n} \left(\frac{1}{2^i}\right)^2 = \frac{4^n-1}{3\cdot 4^{2n}}.$$

(4) Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 - k^3$.

(5) Calculer : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k$.

(6) (a) Montrer que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$: $\displaystyle\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

(b) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$ et si $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k \binom{n}{k} = 0$.

Exercice 3 (Séries usuelles)**.** Justifier la convergence des séries suivantes et calculer leur somme.

(1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n(n-1)}{6^n}$ (2) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{2^n}{(n+1)!}$ (3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n}{n!}$

2 Algèbre

Exercice 4 (Systèmes linéaires)**.**

(1) On considère le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} (2+\lambda)x & + & 2y & - & z & = 0 \\ 2x & + & (\lambda-1)y & + & 2z & = 0 \\ -x & + & 2y & + & (2+\lambda)z & = 0 \end{cases}$$

  (a) Résoudre ce système lorsque $\lambda = 0$.
  (b) Résoudre ce système lorsque $\lambda = 3$.
  (c) Résoudre ce système lorsque $\lambda = -3$.

(2) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Résoudre les équations $AX = 0$, $AX = X$ et $AX = 3X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

(3) On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Résoudre les équations $CX = 0$, $CX = -X$ et $CX = 3X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{5,1}(\mathbb{R})$.

☞ *Pour les Questions (2) et (3), on pourra présenter les solutions sous formes de sous-espaces vectoriels engendrés par un nombre fini de vecteurs.*

Exercice 5 (Matrices)**.** On considère la matrice A définie ci-dessous et I la matrice unité de taille 3,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) (a) A l'aide du pivot de Gauss, vérifier que la matrice A est inversible puis calculer son inverse.
  (b) Calculer $A^2 - 4A + 3I$.
  (c) En déduire une nouvelle preuve que A est inversible et calculer son inverse sans utiliser le pivot de Gauss.

(2) (a) Montrer que pour tout entier n, il existe des réels a_n et b_n tels que : $A^n = a_n A + b_n I$. *On pourra utiliser 1b.*
  (b) Montrer que, pour tout entier n, $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$.
  (c) En déduire la valeur de a_n puis de b_n en fonction de n.
  (d) Donner l'expression de A^n en fonction de n.

Exercice 6 (Matrices)**.** On considère les trois matrices

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer H^2, puis, en utilisant la formule du binôme de Newton, calculer $(I + aH)^n$.
(2) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de F^n.

3 Analyse

Exercice 7 (Une suite)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3^n$. On introduit la suite auxiliaire $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$.

(1) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique.
(2) En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 8 (Suite et série)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

(1) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
(2) Étudier le sens de variation et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi que sa limite.
(3) On pose pour tout entier n, $v_n = \ln(u_n)$.
Calculer v_{n+1} en fonction de v_n puis montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = v_0 - v_{n+1}$
(4) En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge.

Exercice 9 (Fonctions)**.** Dans cet exercice, on considère la fonction f définie sur $]-\infty;1[$ comme suit :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall x \in\,]-\infty;1[\setminus \{0\},\ f(x) = \frac{-x}{(1-x)\ln(1-x)}.$$

(1) Montrer que f est continue sur $]-\infty;1[$.
(2) (a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;1[$, puis calculer $f'(x)$ pour tout réel x élément de $]-\infty;0[\,\cup\,]0;1[$.
(b) Déterminer le signe de la quantité $\ln(1-x) + x$ lorsque x appartient à $]-\infty;1[$.
(c) En déduire les variations de f.
(d) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition, puis dresser son tableau de variation.
Pour la limite en 1^-, on pourra poser $h = 1 - x$.
(3) Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Exercice 10 (Intégrales)**.** Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit :

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\mathrm{d}x$$

(1) (a) Calculer la dérivée de la fonction $g : x \mapsto (x+1)\ln(x+1) - x$.
(b) Calculer I_0.
(2) (a) Montrer que $I_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) Établir que la suite (I_n) est décroissante.
(c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.
(3) (a) Justifier l'égalité : $x^n \ln(1+x) \leq x^n$ pour tout $x \in [0,1]$.
(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\qquad I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
(c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} I_n$
(4) (a) En utilisant une intégration par parties, montrer que:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad I_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x$$

(b) Montrer que

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n+2}$$

et en déduire un encadrement de I_n.
(c) En déduire $\lim_{n\to+\infty} nI_n$

4 Probabilités

Exercice 11. Soit p un réel appartenant à l'intervalle $]0;1[$. On note $q = 1 - p$. On dispose dans tout l'exercice d'une même pièce dont la probabilité d'obtenir PILE vaut p.
On procède à l'expérience suivante $\mathcal{E}$: "*On effectue une succession illimitée de lancers de la pièce*" On note :

- pour tout entier naturel non nul n, X_n la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n premiers lancers de la pièce ;
- pour tout entier naturel non nul j, F_j l'événement : "La pièce donne FACE lors du j-ième lancer";
- Y la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du second PILE.
  Par exemple, si les lancers ont donné dans cet ordre : "FACE, PILE, FACE, FACE, FACE, PILE", alors $Y = 4$.

On admet que les variables aléatoires X_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ et Y sont définies sur un même espace probabilisé modélisant l'expérience $\mathcal{E}$.

(1) Simulation informatique.
  (a) Écrire une fonction en `SciLab` d'en-tête :
  `function res=Lancer(p)`
  qui crée un nombre aléatoire dans l'intervalle $[0;1]$ et renvoie 1 si ce nombre aléatoire est strictement inférieur à p et 0 sinon.
  Indication : On rappelle que la fonction rand() renvoie un nombre aléatoire dans l'intervalle $[0;1]$.
  (b) Écrire une fonction en `SciLab` d'en-tête :
  `function res=Premier_Pile(p)`
  qui simule autant de lancers de la pièce que nécessaire jusqu'à l'obtention du premier PILE et renvoie le nombre de lancers effectués.
  Indication : si on le souhaite, on pourra utiliser la fonction `Lancer` *en la répétant convenablement.*
  (c) Écrire un programme en `SciLab` qui demande un réel p à l'utilisateur, puis qui simule autant de lancers de la pièce que nécessaire jusqu'à l'obtention du second PILE, et affiche le nombre de FACE obtenus en tout.
  Indication : on pourra utiliser la fonction `Premier_Pile` *en la répétant convenablement.*

(2) Soit n un entier naturel non nul. Donner la loi de X_n. Préciser la valeur de son espérance $E(X_n)$ et de sa variance $V(X_n)$.

(3) Déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire Y.

(4) Donner les valeurs des probabilités :
$$P(Y = 0), \quad P(Y = 1) \quad \text{et} \quad P(Y = 2)$$

(5) Soit n un entier naturel. Justifier que les événements :
$$(Y = n) \quad \text{et} \quad (X_{n+1} = 1) \cap \overline{F_{n+2}}$$
sont égaux.

(6) Prouver que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Y = n) = (n+1)p^2q^n$$

(7) Vérifier par le calcul que :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n) = 1$$

(8) Démontrer que la variable aléatoire Y possède une espérance $E(Y)$ et donner sa valeur.

(9) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On note Y_k la variable aléatoire égale au nombre de FACE obtenus avant l'apparition du k-ième PILE. En particulier, on a $Y_2 = Y$.
En généralisant la méthode utilisée dans les questions précédentes, déterminer la loi de Y_k.

Exercice 12 (Densité)**.** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

(1) Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.
On note X une variable aléatoire admettant f comme densité.

(2) Montrer que la fonction de répartition de X est donnée par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-x}(1+x) & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$

Exercice 13 (Densité)**.** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$, on pose : $I_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} \mathrm{d}t$.

(1) Calculer $I_0(x)$. En déduire que l'intégrale $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} \mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur.

(2) Calculer $I_1(x)$. En déduire que l'intégrale $I_1 = \int_0^{+\infty} te^{-t} \mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur.

(3) À l'aide d'une intégration par parties, établir :
$$I_{n+1}(x) = -x^{n+1}e^{-x} + (n+1)I_n(x).$$

(4) En déduire, par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale
$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \mathrm{d}t$$
est convergente et que $I_n = n!$.

(5) Soit
$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{n!} t^n e^{-t}, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que f_n est la densité d'une variable aléatoire à densité X_n.

(b) Reconnaitre la loi de X_0 puis rappeler l'expression de sa fonction de répartition.

(c) Sous quelle condition X_n admet-elle une espérance ? Montrer que X_n admet une espérance et que $E(X_n) = n + 1$.

5 SciLab

Attention, la suite d'exercices et les instructions `SciLab` nécessaires à leur résolution ne constitue en aucun cas une liste exhaustive des compétences à maîtriser en informatique.

Exercice 14. (D'après **EDHEC 2016**) On considère une suite (u_n) qui vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$
$$u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}.$$

(1) Compléter les commandes `SciLab` suivantes qui permettent de calculer et d'afficher un entier n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

```
n=0;
while ...........
    n=...........
end
disp(n)
```

(2) Le Script ci-dessus affiche l'une des trois valeurs $n = 55, n = 70$ ou $n = 85$. En prenant $2,3$ comme valeur approchée de $\ln(10)$, déterminer laquelle.

Exercice 15. (D'après **EML 2016**) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x\ln(x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
et la suite (u_n) définie par la relation de récurrence
$$u_0 = \frac{1}{2}, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

(1) (*) Démontrer que (u_n) est croissante et converge vers 1.
(2) Écrire un programme sous `SciLab` qui calculer et affiche un entier N tel que
$$1 - u_N < 10^{-4}.$$

Exercice 16. (*D'après **EML 2015**) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 e^x$.
(1) Montrer la convergence de la série $\sum \frac{1}{f(n)}$. On note S sa somme.
(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}.$$
(3) En déduire l'écriture d'un programme sous `SciLab` qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-5} près.

Exercice 17. (D'après **EML 2017**) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = e^x - e\ln(x)$ et la suite (u_n) définie par la relation de récurrence
$$u_0 = 2, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$
(1) *Montrer que (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.*
(2) Écrire un programme sous `SciLab` qui, étant donné un réel A rentré par l'utilisateur, calcule et affiche un entier naturel N tel que $u_n \geq A$.

Exercice 18. (*D'après **ECRICOME 2017**) Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimité de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :
$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i.$$
On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre n de boules contenues dans l'urne, afin qu'elle simule la variable aléatoire T_n:

```
function y=T(n)
    S = ..........
    y = ..........
    while ..........
        tirage = grand(1,1,'uin',1,n)
        S = S + tirage
        y = ..........
    end
endfunction
```

Exercice 19. (*D'après **EML 2015**) On considère une v.a. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$ et on introduit la v.a. V définie par
$$V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U),$$
où λ est un réel strictement positif.
(1) Montrer que $V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
(2) En déduire l'écriture d'une fonction `SciLab`, notée `y=loi_expo(lambda)` qui, prenant en argument un paramètre `lambda` renvoie une simulation de la loi exponentielle $\mathcal{E}$(`lambda`).