ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Chapitre 2. Espaces vectoriels.

1 Avant-propos

La notion d'espace vectoriel a été brièvement introduite dans le cours de première année. Plus précisément, nous nous sommes intéressés à des éléments de $\mathbb{R}^n$, que l'on a appelés *vecteurs*, et sur lesquels nous avons fait des opérations. On a **additionné** des vecteurs et on a considéré des **multiples** de vecteurs, ces deux opérations permettant ainsi d'obtenir des *combinaisons linéaires* de vecteurs.

Si nous nous sommes restreints à ne considérer comme vecteurs que des $n-$uplets de réels (associés à des *matrices colonnes*), ce chapitre va permettre d'étendre la notion d'espace vectoriel à un ensemble non vide d'objets que l'on **munira** d'opérations analogues à celles susmentionnées.

2 $\mathbb{R}-$Espaces Vectoriels

La définition générale d'un espace vectoriel ci-dessous est assez abstraite. Les exemples (et contre-exemples) qui suivront permettront de bien comprendre.

Définition 1. *Soit E un ensemble non vide sur lequel sont définies deux opérations : une* ***loi de composition interne****, notée $+$ et une* ***loi de composition externe****, notée $\cdot$*

$$+ : \begin{array}{ccc} E\times E & \to & E \\ (u,v) & \to & u+v \end{array}, \qquad\qquad \cdot : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times E & \to & E \\ (\lambda,u) & \to & \lambda\cdot u \end{array}$$

*On dit que $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$**-espace vectoriel** si et seulement si*

(1) La loi $+$ est commutative : $\forall (u,v)\in E^2,\quad u+v=v+u.$
(2) La loi $+$ est associative : $\forall (u,v,w)\in E^3,\quad (u+v)+w=u+(v+w).$
(3) Il existe un élément neutre pour la loi $+$, noté 0_E, tel que :

$$\forall u\in E,\quad u+0_E=0_E+u=u.$$

(4) Tout élément de E admet un symétrique pour la loi $+$ c'est à dire :

$$\forall u\in E, \exists v\in E \quad \textit{tel que} \quad u+v=v+u=0_E \quad (\textit{on notera } v=-u).$$

(5) $\forall u\in E,\quad 1\cdot u=u$
(6) $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall u\in E,\quad \lambda\cdot(\mu\cdot u)=(\lambda\mu)\cdot u$
(7) $\forall (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \forall u\in E,\quad (\lambda+\mu)\cdot u=\lambda\cdot u+\mu\cdot u$
(8) $\forall \lambda\in\mathbb{R},\ \forall (u,v)\in E^2,\quad \lambda\cdot(u+v)=\lambda\cdot u+\lambda\cdot v$

☞ Les éléments d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel E sont appelés **vecteurs** (de E). On a choisi dans ce cours de noter "le vecteur u" simplement $u \in E$. On rencontrera parfois (autres cours, livres, annales) une notation des vecteurs "avec une flèche" $\overrightarrow{u} \in E$.

☞ Les éléments de $\mathbb{R}$ sont appelés des **scalaires**.

☞ L'élément neutre 0_E est appelé **vecteur nul**. Attention à bien faire la distinction entre celui-ci (souvent noté 0 pour alléger les notations) et le scalaire (le réel) 0.

☞ Tout espace vectoriel contient au moins le vecteur nul. Ainsi, un ensemble ne contenant pas l'élément 0 ne peut pas être un espace vectoriel.

Exemple 1. On vérifie (et c'est fastidieux) que $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ (où $+$ est l'addition composante par composante et $\cdot$ est la multiplication de chaque composante par le scalaire) est un espace vectoriel dont le vecteur nul est le $n-$uplet dont toutes les composantes sont nulles.

Exemple 2. De même, on peut aussi vérifier que, notant $c_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles qui convergent vers 0, que $(c_0(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel, où les lois de composition sont (assez naturellement) définies par

$$(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n), \qquad \lambda \cdot (u_n) = (\lambda u_n).$$

Le vecteur nul est ici la suite dont tous les termes sont nuls (cette suite converge donc bien vers 0). Finalement, dire (ou savoir) que $(c_0(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un espace vectoriel revient à dire (ou savoir) que toute combinaison de suites qui convergent vers 0 est encore une suite qui converge vers 0.

Exemple 3. En revanche, muni les mêmes lois de composition interne et externe, l'ensemble des suites géométriques n'est pas un espace vectoriel: il n'est pas sable par somme! En effet, si $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$, on voit facilement que la suite $(u_n + v_n)$ n'est pas géométrique.

☞ Dans la pratique, **on ne demandera jamais** d'utiliser la Définition 1 pour montrer qu'un ensemble est un espace vectoriel. Les espaces vectoriels usuels et au programme de ce cours sont listés ci-dessous et il sera inutile de redémontrer qu'il s'agit d'espaces vectoriels.

Néanmoins, il est instructif d'avoir en tête une idée de la justification empêchant certains ensembles d'avoir une structure d'espace vectoriel, comme le propose l'exercice ci-dessous.

Exercice 1. Donner une justification très rapide du fait que les ensembles ci-dessous ne sont pas des espaces vectoriels.

(1) $(\mathbb{R}^*, +, \cdot)$
(2) $(\mathbb{R}_+, +, \cdot)$
(3) $(E, +, \cdot)$ où E est le cercle unité de $\mathbb{R}^2$: $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad x^2 + y^2 = 1\}$.
(4) L'ensemble des polynômes de degré n (où $n \in \mathbb{N}$) muni de la somme de polynômes et de la multiplication d'un polynôme par un réel.
(5) L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni de la somme des matrices et de la multiplication d'une matrice par un réel.

Proposition 1. (Espaces vectoriels usuels). Les ensembles suivants, munis des lois de composition interne et externe à préciser sont des $\mathbb{R}-$espaces vectoriels.

Notation	**Description**
$(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	Ensemble des n-uplets de réels (notation : $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$)
$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}), +, \cdot)$	Ensemble des matrices à n lignes et p colonnes
$(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$	Ensemble des matrices carrées de taille n
$(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$	Ensemble des polynômes à coefficients réels
$(\mathbb{R}_n[X], +, \cdot)$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	Ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n
$(\mathcal{A}(\mathcal{D}, \mathbb{R}), +, .)$	Ensemble des applications d'un ensemble $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
$(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$	Ensemble des suites réelles

La structure d'espace vectoriel permet de faire du calcul; en voici les règles.

Proposition 2 (Règles de calcul)**.** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(u, v) \in E^2$.

(1) $0 \cdot u = 0_E \quad \text{et} \quad \lambda 0_E = 0_E$

(2) $\lambda u = 0_E \Longleftrightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E)$

(3) $\lambda(-u) = (-\lambda)u = -\lambda u$

(4) $\lambda(u - v) = \lambda u - \lambda v$

Définition 2. *On dit que deux vecteurs u et v de E sont* ***colinéaires*** *si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda v$ (ou $v = \lambda u$).*

☞ Le vecteur nul est colinéaire à n'importe quel vecteur (pour tout $u \in E$, $0_E = 0 \cdot u$).

☞ Les deux égalités sont équivalentes dès que $\lambda \neq 0$: $u = \lambda v \Longleftrightarrow v = \dfrac{1}{\lambda} u$.

☞ Deux vecteurs égaux sont toujours colinéaires ($\lambda = 1$).

Exercice 2. Vérifier (en explicitant le coefficient de *proportionnalité* λ) que les vecteurs u et v donnés sont colinéaires.

(1) $u = (-8, 2)$ et $v = (4, -1)$ dans $\mathbb{R}^2$.

(2) $u = X^2 + X + 1$ et $v = \dfrac{1}{2}X^2 + \dfrac{1}{2}X + \dfrac{1}{2}$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.

(3) $u = J$ et $v = J^2$, où $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Définition 3. *Soient $u_1, \ldots, u_p$ des vecteurs d'un même espace vectoriel E. On dit qu'un vecteur $v \in E$ est une* ***combinaison linéaire*** *des vecteurs $u_1, \ldots, u_p$ lorsqu'on peut trouver des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que*

$$v = \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_p u_p.$$

☞ Pour savoir si un vecteur v est bien une combinaison linéaire de vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$ donnés, il suffit de résoudre un certain système linéaire.

Exemple 4. Le vecteur $w = (4, 2) \in \mathbb{R}^2$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $u = (2, -1)$ et $v = (3, 1)$? Si on ne trouve de combinaison linéaire *immédiate* (ou évidente), on résout

$$\begin{aligned} (4, 2) = \lambda(2, -1) + \mu(3, 1) \quad &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 2\lambda + 3\mu & = & 4 \\ -\lambda + \mu & = & 2 \end{array} \right. \\ &\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \lambda & = & -2/5 \\ \mu & = & 8/5 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Le système a des solutions donc la réponse est oui, et on peut écrire

$$w = -\frac{2}{5}u + \frac{8}{5}v.$$

Exercice 3. Dans chaque cas, le vecteur w est-il combinaison des vecteurs u et v?

(1) Dans $\mathbb{R}^3$, $w = (1, 2, 1)$, $u = (2, 1, 2)$ et $v = (1, 1, 2)$.

(2) Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$w = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) Dans $\mathbb{R}_3[X]$, $v = X^2 + 1$, $u = X^3 - X$ et $v = 2X$.

3 Sous-espaces vectoriels

Définition 4. *Soient $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel et F une partie non vide de E. On dit que F est un* ***sous-espace vectoriel de*** *E si et seulement si $(F,+,\cdot)$ est un espace-vectoriel.*

Théorème 1. *(Caractérisation d'un s-e.v) Soient $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel et $F \subset E$. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) F est un sous-espace vectoriel de E;
(2) Les trois conditions suivantes sont vérifiées
  (i) F est ***non vide****;*
  (ii) F est ***stable par addition****: pour tous $u, v \in F$, $u+v \in F$;*
  (iii) F est ***stable par multiplication par un scalaire****: pour tout $u \in F$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda u \in F$.*

☞ **En pratique**, on vérifie que F est non vide en vérifiant que $0_E \in F$ et on combine les conditions (ii) et (iii) en vérifiant que F est stable par combinaison linéaire:

$$F \text{ s-ev. de } E \Longleftrightarrow \begin{cases} 0_E \in F \\ \forall\, u, v \in F, \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \lambda u + v \in F. \end{cases}$$

Exercice 4. Dans chacun des cas suivants, dire (en justifiant) si F est un sous-espace vectoriel de E.

(1) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x - 2y + z = 0\}$;
(2) $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \mathbb{R}^2$;
(3) $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] :\ P(1) = 0\}$;
(4) $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $F = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ :\ u_{n+1} = 2u_n - 3\}$;
(5) $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) :\ b = d \right\}$.

☞ On peut aussi utiliser la caractérisation précédente pour montrer qu'un ensemble F est un espace vectoriel. En effet, en montrant que F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel usuel $(E,+,\cdot)$ bien choisi, on a en particulier que $(F,+,\cdot)$ est un espace vectoriel.

Exercice 5. (Extrait de **EML 2014**) Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}$ défini ci-dessous est un espace vectoriel, où

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} :\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Proposition 3. (Intersection de deux s-e.v) Soient $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors, $F \cap G$ est encore un sous-espace vectoriel de E.

☠ Attention, si l'intersection de deux s-e.v. est bien encore un s-e.v., ce n'est plus du tout le cas (en général) pour la réunion de deux s-e.v.

Exercice 6. Soient $F = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(1) = 0\}$ et $G = \{P \in \mathbb{R}[X] : P(0) = 0\}$. Montrer que $F \cup G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

4 Familles de vecteurs

Définition 5. *Soit $(E,+,\cdot)$ un espace vectoriel. Une* ***famille de*** *n* ***vecteurs*** *de E est un $n-$uplet $(u_1, u_2, ..., u_n)$ où chaque u_i est un vecteur de E.*

Exemple 5.

- $((1,2);\ (2,3);\ (3,4))$ est une famille de trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
- (X^2+1, X, X^3) est une famille de trois vecteurs $\mathbb{R}_4[X]$.

4.1 Sous-espace engendré

Définition 6. *Soit $(u_1, u_2, ..., u_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E. L'ensemble de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de cette famille est noté*

$$\mathit{Vect}(u_1, u_2, ..., u_n) = \{v \in E \ : \ v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n, \ (\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n\}.$$

Exercice 7. Écrire les ensembles suivants sous forme d'un Vect().

(1) $A = \{(x, y, -2x + y) \ : \ (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$;

(2) $B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \begin{cases} x + y + z &= 0 \\ x + 2y &= 0 \end{cases}\right\}$

Théorème 2. *Soit $(u_1, u_2, ..., u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. Alors, l'ensemble $\mathit{Vect}(u_1, ..., u_n)$ est un sous-espace vectoriel de E. On l'appelle le **sous-espace vectoriel engendré** par la famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$.*

☞ Le théorème précédent permet notamment de montrer qu'un ensemble est un (sous-) espace vectoriel en l'écrivant sous forme de sous-espace engendré par une certaine famille de vecteurs.

Exercice 8. (Extrait de **ECRICOME 2009**) Montrer que l'ensemble E ci-dessous est un espace vectoriel, où

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \ : \ (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Proposition 4. (Opérations sur les sous-espaces engendrés) Soit $(u_1, u_2, ..., u_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.

(1) Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels **non nuls**, alors : $\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_n) = \mathrm{Vect}(\lambda_1 u_2, \ldots, \lambda_n u_n)$;

(2) Si u_n est combinaison linéaire de $(u_1 \cdots, u_{n-1})$, alors : $\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_{n-1}, u_n) = \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_{n-1})$;
☞ En particulier, si $u_n = 0_E$, alors : $\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_{n-1}, 0_E) = \mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_{n-1})$.

(3) Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des réels **avec $\boldsymbol{\lambda_1 \neq 0}$** alors :

$$\mathrm{Vect}(u_1, u_2, ..., u_n) = \mathrm{Vect}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i, u_2, \ldots, u_n\right).$$

☞ Ce résultat montre qu'on peut réduire le cardinal d'une famille pour engendrer le même espace. Par exemple, si un espace est engendré par une famille de trois vecteurs, il peut éventuellement être également engendré par une sous-famille de deux voire d'un seul de ces vecteurs.

Exercice 9.

(1) Montrer que : $\mathrm{Vect}\big((4, 0, -2); \ (1, 2, -1); \ (-3; 2; 1)\big) = \mathrm{Vect}\big((2, 0, -1); \ (1, 2, -1)\big)$.

(2) Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E.
Montrer que : $\mathrm{Vect}\big(e_1 + e_2 + e_3 + e_4; \ e_2 + e_3; \ 2e_2 + 2e_3\big) = \mathrm{Vect}\big(e_1 + e_4; \ e_2 + e_3\big)$.

☞ Lorsque la famille est réduite à un vecteur, l'espace engendré est souvent appelé **droite vectorielle**; lorsque celle-ci est composée de deux vecteurs (non colinéaires), on parle de **plan vectoriel**.

4.2 Familles génératrices

Définition 7. *Soient F un $\mathbb{R}-$ espace vectoriel et $\mathcal{F} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ une famille de vecteurs de F. On dit que $\mathcal{F}$ est une **famille génératrice de** F si et seulement si*

$$F = \mathit{Vect}(u_1, u_2, ..., u_n).$$

☞ Dire que la famille $\mathcal{F}$ est génératrice de F revient à dire que la famille $\mathcal{F}$ **engendre** l'espace vectoriel F. C'est à dire que **tout** vecteur de F s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille:

$$\forall v \in F, \ \exists(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i.$$

☞ Tout espace vectoriel admet **une infinité** de familles génératrices.

☞ Afin de déterminer si une famille $(u_1, ..., u_n)$ est génératrice de F, on prend un vecteur v **quelconque** de F et on essaie de trouver des coefficients $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + ... + \lambda_n u_n.$$

Si (et seulement si) le système correspondant est compatible, alors la famille est bien génératrice. Les coefficients obtenus ne sont en revanche pas nécessairement uniques.

Exercice 10.

(1) Montrer que la famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.
(2) Montrer que la famille $((1,1);(-1,1))$ est génératrice de $\mathbb{R}^2$.

☞ Afin de déterminer une famille génératrice d'un (sous-) espace vectoriel F défini par une équation, un système d'équations ou une propriété, disons $\mathcal{P}$, on prend un éléments quelconque $v \in F$ que l'on écrit de manière explicite et on essaie d'exprimer la propriété $\mathcal{P}$ de sorte à obtenir une condition de liaison sur les paramètres de v de sorte à exprimer v comme combinaisons linéaire de vecteurs explicites.

Exercice 11. Déterminer une famille génératrice des sous-espaces suivants.

(1) $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid AM = MA\}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
(2) $G = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P - XP' = 0\}$.

Proposition 5. Soit $(u_1, u_2, ..., u_n)$ une famille génératrice d'un espace vectoriel E. Alors,

(1) La famille obtenue en changeant l'ordre des vecteurs de la famille initiale reste génératrice de E;
(2) Pour tout $v \in E$, la famille $(u_1, u_2, ..., u_n, v)$ est encore génératrice de E;
(3) Si il existe $i \in [\![1; n]\!]$ tel que u_i est combinaison linéaire des u_j $(j \neq i)$, alors la famille $(u_1, ..., u_{i-1}, u_{i+1}, ..., u_n)$ reste génératrice de E.

☞ Le dernier point de cette proposition permet de construire une famille génératrice de cardinal minimal, ce qui sera essentiel pour construire une *base* d'un espace vectoriel.

4.3 Familles libres

Définition 8. *Une famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est dite **libre** si et seulement si, pour tout $n-$uplet $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$:*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E\right) \Longrightarrow (\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0).$$

*Une famille qui n'est pas libre est dite **liée**.*

☞ Lorsqu'une famille est libre, on dit aussi que ses vecteurs sont **linéairement indépendants**.

☞ Si la famille ne contient que deux vecteurs (**et seulement dans ce cas**), la famille est libre si et seulement si les deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

☞ Si un des vecteurs de la famille est combinaison linéaire des autres, alors la famille est liée.

☞ Toute famille contenant le vecteur nul est liée.

☞ Une famille ne contenant qu'un seul vecteur est libre si et seulement si ce vecteur est non nul.

Exercice 12.

(1) Montrer que la famille $((1,3,-3),(4,2,-3),(-2,7,-6))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$.
(2) La famille $(1 + X + X^2,\ 3 + X + 5X^2,\ 2 + X + 3X^2)$ est-elle libre ou liée dans $\mathbb{R}[X]$?
(3) La famille $(\exp(x),\ \exp(2x))$ est-elle une famille libre ou liée de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

Proposition 6. Soit $(u_1, u_2, ..., u_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E. Alors,

(1) La famille obtenue en changeant l'ordre des vecteurs de la famille initiale reste libre;
(2) La famille obtenue en retirant un des vecteurs de la famille initiale reste libre;
(3) La famille obtenue en remplaçant un des vecteurs par un multiple **non nul** de celui-ci reste libre.
(4) Si $v \notin \mathrm{Vect}(u_1, u_2, .., u_n)$ (en particulier $v \neq 0_E$), la famille obtenue en rajoutant le vecteur v à la famille initiale reste libre.

☠ Attention, ce n'est pas parce que des vecteurs sont deux à deux non colinéaires que la famille est libre. Par exemple, on voit facilement, dans $\mathbb{R}^2$, que la famille $((1,0);(0,1);(1,1))$ est liée.

☞ Si $(u_1, u_2, ..., u_n)$ est une famille libre, alors tout vecteurs $v \in \mathrm{Vect}(u_1, u_2, .., u_n)$ se décompose de **manière unique** comme combinaison linéaire des vecteurs u_i.

Proposition 7. (Famille de polynômes à degrés échelonnées - **Hors programme**). Soit $(P_1, P_2, ..., P_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ à *degrés echelonnés*, c'est à dire telle que

$$\deg P_1 < \deg P_2 < ... < \deg P_n.$$

Alors, la famille est libre.

☞ Le résultat ci-dessus est officiellement hors programme en ECE. Cela dit, l'avoir en tête n'est pas une mauvaise chose même si il faut savoir, dans un cadre explicite, redémontrer qu'une telle famille est libre.

4.4 Bases

Définition 9. *Soit E un espace vectoriel. La famille $(u_1, u_2, ..., u_n)$ de vecteurs de E forme une **base** de E si et seulement si elle est à la fois **libre et génératrice** de E.*

De manière équivalente, $(u_1, ..., u_n)$ forme une base de E si et seulement si tout vecteur de E se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs u_i:

$$\forall\, v \in E,\ \exists!\ (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i.$$

*On appelle alors le $n-$uplet $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ les **coordonnées** de v dans la base $(u_1, u_2, ..., u_n)$.*

☞ Il suit immédiatement que toute famille libre forme une base du sous-espace vectoriel qu'elle engendre.

Exercice 13. Montrer que les familles $\mathcal{F}$ ci-dessous forment des bases des espaces vectoriels E précisés.

(1) $\mathcal{F} = ((1,0,0);\ (1,1,0);\ (1,1,1))$ dans $E = \mathbb{R}^3$.
(2) $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ dans $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Proposition 8. (Bases canoniques). Pour chacun des espaces vectoriels usuels suivants, la famille de vecteurs notée ici $\mathcal{B}$ forme une base, appelée base canonique de l'espace.

(1) **Base canonique de $\mathbb{R}^n$.** $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$, où

$$e_1 = (1,0,...,0), \qquad e_2 = (0,1,0,...,0), \quad \ldots, \quad e_n = (0,0,...,0,1).$$

(2) **Base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.** $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, ..., E_{1,n}, E_{2,1}, ..., E_{n,n})$, où

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \qquad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad ..., \quad E_{n,n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) **Base canonique de** $\mathbb{R}_n[X]$. $\mathcal{B} = (1, X, X^2, ..., X^n)$.

☞ Ces bases sont dites **canoniques** dans le sens où elles apparaissent comme des bases *naturelles* de l'espace vectoriel considéré: les coordonnées d'un vecteur dans la base canonique ne sont autres que les *composantes* (ou paramètres) de ce vecteur. Par exemple,

- Dans $\mathbb{R}^3$,
$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = xe_1 + ye_2 + ze_3.$$
- Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,
$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = xE_{1,1} + yE_{1,2} + zE_{2,1} + tE_{2,2}$$

5 Dimension d'un $\mathbb{R}-$espace vectoriel

5.1 Bases et dimension

Théorème 3. *Soit E un espace vectoriel admettant une base $(e_1, e_2, ..., e_n)$ de cardinal n. Alors, toutes les bases de E ont le même cardinal n. Ce nombre est appelé la* ***dimension*** *de l'espace; on note* $\dim E = n$.

☞ Par convention, l'espace $\{0_E\}$ est de dimension 0.

Exemple 6. Le résultat précédent sur les bases canoniques des espaces usuels permet notamment de préciser la dimension de ces espaces

- $\mathbb{R}^n$ est de dimension n;
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension n^2;
- Plus généralement, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de dimension np;
- $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension $n + 1$.

Proposition 9. Soient E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F} = (u_1, u_2, ..., u_p)$ une famille de p vecteurs de E. Alors

(i) Si $p > n$, $\mathcal{F}$ n'est pas libre;
(ii) Si $p < n$, $\mathcal{F}$ n'est pas génératrice (de E);
(iii) Si $p = n$, alors
$$\mathcal{F} \text{ est une base } \iff \mathcal{F} \text{ est libre } \iff \mathcal{F} \text{ est génératrice.}$$

☞ Ce résultat est **très pratique**. Lorsque la dimension de l'espace est connue, on choisit en général de montrer seulement le caractère libre ou générateur pour montrer qu'une famille forme une base au lieu d'avoir à vérifier les deux!

Exercice 14.

(1) Montrer que la famille (v_1, v_2, v_3) forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, où
$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(2) Montrer que la famille $(1, X - 1, X^2 - 1)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

5.2 Dimension d'un sous-espace

Théorème 4. *Soit E un espace vectoriel de dimension n. Alors,*

(1) Tout sous-espace $F \neq \{0_E\}$ de E admet (une infinité de) base(s).
(2) Le cardinal d'une base de F est donc la dimension de F, toujours notée $\dim F$.
(3) Pour tout sous-espace F de E, on a
  (i) $\dim F \leq n$
  (ii) $\dim F = n \iff F = E$

Exercice 15. Montrer que le sous-ensemble F défini ci-dessous est bien un espace vectoriel et en donner une base. Quelle est alors la dimension de F?

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) : \quad x - 2y + z = 0 \right\}.$$

Exercice 16. Montrer que le sous-ensemble A formé de suites réelles vérifiant la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 ci-dessous est un espace vectoriel et préciser sa dimension, avec

$$A = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ : \ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n\}.$$

5.3 Rang d'une famille de vecteur

Définition 10. *On appelle **rang** d'une famille de vecteurs $(u_1, u_2, ..., u_n)$ de E la dimension du sous-espace qu'elle engendre.*

☞ En particulier, le rang d'une famille de vecteur est égal à son cardinal si et seulement si la famille est libre.

☞ De plus, le rang d'une famille est toujours inférieur ou égal à la dimension de E et l'égalité a lieu si et seulement si la famille est génératrice.

☞ En pratique, afin de déterminer le rang d'une famille de vecteurs, on essaie d'ôter un à un les vecteurs de la famille qui peuvent d'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Exercice 17. Déterminer le rang de la famille $\mathcal{F}$ de vecteurs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ci-dessous

$$\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

6 Autres exercices

Exercice 201. Les ensembles suivant sont-ils des espaces vectoriels ?

(1) L'ensemble $\mathcal{D}$ des matrices diagonales d'ordre 3.
(2) L'ensemble $\mathcal{S}$ des matrices triangulaires supérieures d'ordre 3.
(3) L'ensemble $\mathcal{T}$ des matrices triangulaires d'ordre 3.
(4) L'ensemble $\mathcal{N}$ des suites convergeant vers 0.
(5) L'ensemble $\mathcal{I}$ des suites divergeant vers $+\infty$.
(6) $P_0 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\}$
(7) $P_1 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P'(0) = 0\}$.
(8) $P_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) \geq 3\}$.
(9) $F_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f$ est croissante sur $\mathbb{R}\}$.
(10) $F_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f$ est paire sur $\mathbb{R}\}$.
(11) $F_3 = \left\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0\right\}$.

Exercice 202. Justifier que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels en déterminant une famille génératrice.

$$A = \left\{(x-y, x+y, 2x-3y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}; \quad B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+2y-3z=0\right\};$$

$$C = \left\{P = aX^2 + (b-2a)X + a - b + c,\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}; \quad D = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}.$$

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \ : \ \begin{cases} -x+2y = y+6z \\ y+3z = -2x \end{cases} \right\}; \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} x+z & 2x-y & z \\ y-x & z+2y & x+z \\ 0 & 2x & x-z \end{pmatrix},\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Exercice 203. Montrer l'égalité des ensembles F et G définis ci-dessous

$$F = \mathrm{Vect}\left((1,1,0);(1,2,1)\right), \quad \text{et} \quad G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid -x+y-z=0\right\}.$$

Exercice 204. Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ?

(1) $((4,-16,10);\ (4,-5,3))$ dans $\mathbb{R}^3$.
(2) $((-1,0,1);\ (1,-1,1);\ (0,1,2))$ dans $\mathbb{R}^3$.
(3) $((1,1,1,1);\ (1,2,3,4);\ (1,2,8,16))$ dans $\mathbb{R}^4$.
(4) $((2,2,2);(0,1,1);(1,1,0);(1,1,1))$ dans $\mathbb{R}^3$.
(5) $(X^2;\ X^2+X+1)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
(6) $(X^2;\ X^2-X;\ X^2+X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.
(7) $(X^2, X(X-2);\ (X-2)^2)$ dans $\mathbb{R}_2[X]$.
(8) $\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(9) $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\right)$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 205. Soient E un espace vectoriel de dimension n et (F_k) une suite croissante (au sens de l'inclusion) de sous-espaces vectoriels de Z. On note (d_k) la suite (numérique) des dimensions, *i.e.* $d_k = \dim(F_k)$.

(1) Montrer que la suite (d_k) est convergente.
(2) Montrer qu'elle est *stationnaire*.
(3) Montrer qu'il existe un entier p tel que, pour tout $k \geq p$, $F_k = F_p$.

Exercice 206. Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on note f_k l'élément de E défini par

$$f_k : \ x \mapsto e^{kx}.$$

(1) Montrer que la famille (f_0, f_1, f_2) est libre.
(2) Plus généralement, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, f_1, ..., f_n)$ est libre.
(3) Notant $g_k : \ x \mapsto e^{x+k}$, la famille $(g_0, g_1, .., g_n)$ est-elle libre ?

Exercice 207. Soient a, b et c des réels. On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$$

et $\mathcal{F}$ l'ensemble des matrices de la forme $M_{a,b,c}$: $\mathcal{F} = \{M_{a,b,c}, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\}$.

(1) Montrer que $\mathcal{F}$ est un espace vectoriel.
(2) Exprimer A^2 comme combinaison linéaire de I, A et J puis montrer que : $\mathcal{F} = \mathrm{Vect}\,(I, A, A^2)$.
(3) La famille (I, A, A^2) est-elle libre ?

Exercice 208. On considère les trois polynômes $P_0(X) = (X+1)(X-1)$, $P_1(X) = (X-2)(X+1)$ et $P_2(X) = (X-1)(X-2)$.

(1) Montrer que la famille (P_0, P_1, P_2) est libre.
(2) En déduire que celle-ci forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$. Préciser alors les coordonnées de X dans cette base.

Exercice 209. Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \ M = P(A), \ P \in R[X]\}$.

(1) Montrer que F est un espace vectoriel.
(2) Montrer que A^2 est combinaison linéaire de I et A.
(3) Montrer que $\mathrm{Vect} I, A \subset F$.
(4) À l'aide de la division euclidienne d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ par $X^2 - 1$, montrer que $F \subset \mathrm{Vect}(I, A)$. Conclure à l'égalité des sous-espaces.
(5) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence et donner l'expression d'un unique couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = a_n I + b_n A$.

Exercice 210. Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \ AM = MA\}$.

(1) Montrer que F est un espace vectoriel.
(2) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de F ainsi que la dimension de F.
(3) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n \in F$.
 (b) Après avoir vérifié que la famille ci-dessous formait une base de F, déterminer les coordonnées de A^n dans celle-ci.

$$\left(I, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

(4) Soit $G = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \ {}^tAM = M{}^tA\}$.
 (a) Montrer que $M \in G \Leftrightarrow \ {}^tM \in F$.
 (b) En déduire une base de G ainsi que sa dimension.

Exercice 211. (***) Pour $0 \leq k \leq n$, on note $P_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$. Le but de l'exercice est de démontrer que la famille $(P_0, ..., P_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

(1) Quel est le terme de plus bas degré de P_k ?
(2) On suppose que la famille $(P_0, P_1, ..., P_n)$ est liée.
 (a) Justifier qu'il existe $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ tel que

$$\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i(X) = 0.$$

 (b) Justifier que l'ensemble $A = \{k \in [\![0; n]\!] : \ \lambda_k \neq 0\}$ défini ci-dessous est non vide,
 (c) On pose alors $k_0 = \min\{k \in A\}$. Quel est le terme de degré k_0 dans $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \lambda_i P_i(X)$?
 (d) Conclure.

Exercice 212. (D'après **ECRICOME 2003**) Soit p un entier naturel non nul. On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ désignant l'ensemble des matrices carrées d'ordre p. Si A est une matrice fixée de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on appelle *commutant* de A, le sous-ensemble suivant, noté $C(A)$:

$$C(A) = \{M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) : \ AM = MA\}.$$

Partie I : Structure de $C(A)$

(1) Montrer que $C(A)$ est un espace vectoriel.
(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n \in C(A)$.
(3) Montrer que si les matrices M et N appartiennent à $C(A)$, alors le produit MN appartient aussi à $C(A)$.

Dans toute la suite de l'exercice, on pose $p = 3$ et on considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Partie II : Calcul des puissances de la matrice A ci-dessus

(1) Résoudre les équations $AX = X$ et $AX = 2X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. *On notera $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ l'ensemble des solutions que l'on donnera sous forme de sous-espace engendré.*
(2) Montrer que la famille $(U; V; W)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
(3) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
(4) **On admet** que : $A = PTP^{-1}$. Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = PT^nP^{-1}$.
(5) (a) Montrer par récurrence que pour tout élément $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un réel α_n tel que

$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & \alpha_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

On donnera le réel α_1 ainsi qu'une relation entre α_{n+1} et α_n.
(b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n = n2^{n-1}$.
(c) Expliquer, sans faire les calculs, comment obtenir l'expression de A^n.
(d) La matrice T^n est-elle inversible ? La matrice A^n est-elle inversible ?

Partie III : Matrices commutant avec la matrice A ci-dessus

On rappelle que le commutant de la matrice A, noté $C(A)$, est le sous-ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.

(1) Pour M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $M' = P^{-1}MP$. Montrer que : $AM = MA \Longleftrightarrow TM' = M'T$.
(2) Montrer qu'une matrice $M' \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifie $TM' = M'T$ si et seulement si M' est de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
(3) En déduire que M appartient à $C(A)$ si et seulement si il existe des réels a, b et c tels que :

$$M = \begin{pmatrix} -a + 2b & 2a - 2b & -a + b + 2c \\ -a + b & 2a - b & -a + b + c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

(4) Déterminer alors une famille génératrice de $C(A)$. Cette famille est-elle libre ?