



Chapitre 5. Couples (et suites) de V.A. discrètes

1 Couples aléatoires discrets

On considère deux variables aléatoires discrètes X et Y , avec $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ fini ou dénombrable.

Définition 1.

On appelle couple aléatoire discret une application $V : \Omega \mapsto \mathbb{R}^2$.

Ainsi, on peut écrire $V = (X, Y)$, où X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, avec :

$$\forall \omega \in \Omega, V(\omega) = (X(\omega), Y(\omega)).$$

1.1 Loi conjointe

Définition 2 (Loi conjointe).

La loi conjointe du couple (X, Y) est la donnée de la fonction :

$$\begin{aligned} \varphi_{X,Y} : X(\Omega) \times Y(\Omega) &\rightarrow [0, 1] \\ (x, y) &\mapsto P([X = x], [Y = y]) \end{aligned}$$

où $P([X = x], [Y = y])$ est une notation pour signifier $P([X = x] \cap [Y = y])$.

Méthode. Pour obtenir la loi du couple (X, Y) , on commence par déterminer $X(\Omega)$, $Y(\Omega)$ puis on donne les valeurs de $P([X = x] \cap [Y = y])$ pour tout $x \in X(\Omega)$ et tout $y \in Y(\Omega)$.

Lorsque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis, on peut résumer cette loi dans un tableau à double entrée.

☞ On peut parfois utiliser la formule des probabilités composées

$$P([X = x] \cap [Y = y]) = P_{[Y=y]}([X = x])P([Y = y]).$$

⚠ La probabilité $P([X = x] \cap [Y = y])$ n'est a priori pas égale à $P([X = x]) \cdot P([Y = y])$.

Exercice 1. Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. On tire successivement, avec remise, deux boules de l'urne. On appelle X la somme des numéros obtenus et Y la valeur absolue de la différence entre les deux numéros obtenus.

- (1) Préciser Ω , $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$.
- (2) Déterminer la loi du couple (X, Y) .
- (3) Quels sont les couples $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ qui vérifient $[X = x] \cap [Y = y] = \emptyset$?

☞ L'exercice ci-dessus permet de voir notamment que $V(\Omega) \subsetneq X(\omega) \times Y(\omega)$.


Proposition 1. On a :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} P([X = x] \cap [Y = y]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x] \cap [Y = y]) = 1.$$

1.2 Lois marginales

Définition 3 (Loi marginale).

- (1) La première loi marginale du couple (X, Y) est la loi de la variable aléatoire X .
- (2) La seconde loi marginale du couple (X, Y) est la loi de la variable aléatoire Y .

 **Méthode** (Obtention des lois marginales à l'aide de la formule des probabilités totales).

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes dont on connaît la loi conjointe.

- On obtient la loi de X grâce à la formule des probabilités totales avec le s.c.e $([Y = y])_{y \in Y(\Omega)}$.

$$P([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P([X = x] \cap [Y = y]) \quad \text{ou} \quad P([X = x]) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P([Y = y])P_{[Y=y]}([X = x])$$

- On obtient la loi de Y grâce à la formule des probabilités totales avec le s.c.e $([X = x])_{x \in X(\Omega)}$.

$$P([Y = y]) = \sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x] \cap [Y = y]) \quad \text{ou} \quad P([Y = y]) = \sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x])P_{[X=x]}([Y = y])$$

Remarque 1. Si la loi du couple est résumée dans un tableau à double entrée, les lois marginales s'obtiennent en sommant les éléments de chaque ligne et de chaque colonne.

Exercice 2. Une urne contient 3 boules numérotées de 1 à 3. On tire deux boules dans cette urne et on note X le numéro de la première boule et Y le numéro de la deuxième boule.

- (1) Cas d'un tirage avec remise.
 - (a) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .
 - (b) Déterminer les lois marginales du couple (X, Y)
- (2) Reprendre les questions précédentes dans le cas d'un tirage sans remise.

Exercice 3. On lance une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]0; 1[$ et face avec probabilité $q = 1 - p$. On note X le rang d'apparition du premier pile et Y le rang d'apparition du deuxième pile.

- (1) Préciser $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ puis déterminer la loi du couple (X, Y) .
- (2) Déterminer les lois marginales du couple (X, Y) (sans calculs pour la loi de X).

1.3 Lois conditionnelles

Définition 4. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes.

- Soit $y \in Y(\Omega)$ fixé tel que $P([Y = y]) \neq 0$. On appelle **loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$** la donnée des valeurs

$$P_{[Y=y]}([X = x]), \quad \forall x \in X(\Omega).$$

- Soit $x \in X(\Omega)$ fixé tel que $P([X = x]) \neq 0$. On appelle **loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$** la donnée des valeurs

$$P_{[X=x]}([Y = y]), \quad \forall y \in Y(\Omega).$$

 **Méthode.** On peut obtenir une loi conditionnelle de différentes manières suivants les situations.

- Si on connaît la loi du couple (donc les probabilités $P([X = x] \cap [Y = y])$), on utilise la formule des probabilités composées. Par exemple, la loi conditionnelle de X sachant $[Y = y]$ est donnée par :

$$P_{[Y=y]}([X = x]) = \frac{P([X = x] \cap [Y = y])}{P([Y = y])}, \quad \forall x \in X(\Omega).$$

- Si on ne connaît pas la loi du couple, on peut souvent reconnaître pour la loi conditionnelle une loi connue en utilisant l'information contenue dans l'évènement qui conditionne.

Exercice 4. On lance une pièce donnant pile avec probabilité $p \in]0; 1[$. On note X le rang d'apparition du premier pile et si $X = n$, on note Y le nombre de faces obtenus lors de n lancers supplémentaires.

- (1) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$.

(2) Préciser $Y(\Omega)$ puis montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$P(Y = k) = \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1} \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} (pq)^n.$$

2 Indépendance de variables aléatoires discrètes

2.1 Cas de deux variables

Définition 5. On dit que deux variables aléatoires discrètes X et Y sont **indépendantes** ssi :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega), \quad P([X = x] \cap [Y = y]) = P([X = x]) \times P([Y = y])$$

Remarque 2. Pour montrer que deux variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes, il suffit de trouver un contre-exemple à la relation précédente.

On cherche alors souvent des événements $[X = x]$ et $[Y = y]$ de probabilité non nulle et tels que l'évènement $[X = x] \cap [Y = y]$ est impossible donc de probabilité nulle.

Exercice 5.

- (1) Les variables aléatoires X et Y de l'Exercice 2 sont-elles indépendantes (dans chaque cas) ?
- (2) Les variables aléatoires X et Y de l'Exercice 3 sont-elles indépendantes ?

2.2 Cas de n variables

Définition 6.

- On dit que les variables aléatoires discrètes X_1, \dots, X_n sont **mutuellement indépendantes** ssi

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad P([X_1 = x_1] \cap \dots \cap [X_n = x_n]) = \prod_{k=1}^n P([X_k = x_k]).$$

- On dit que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes si pour tout $n \in \mathbb{N}$ les variables aléatoires X_0, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes.

2.3 Lemme des coalitions

Proposition 2 (Lemme des coalitions).

- Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendante et si f et g sont deux fonctions numériques définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
- Soient X_1, \dots, X_n n variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes et soit $p \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$. Alors toute variable aléatoire fonction des variables X_1, \dots, X_p est indépendante de toute variable aléatoire fonction des variables X_{p+1}, \dots, X_n .

Exemple.

- Si X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 sont 5 variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes alors les variables $X_1 - X_2 + 2X_4^2$ et $X_3 - X_5^2$ sont indépendantes.
- Si X^2 et Y^2 ne sont pas indépendantes, alors X et Y ne le sont pas non plus.

3 Fonctions de deux variables aléatoires discrètes : Loi de $Z = g(X, Y)$

Dans cette section, on étudie des variables aléatoires du type $Z = g(X, Y)$ où (X, Y) est un couple de variables aléatoires et g une fonction de $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ dans \mathbb{R} .

Exercice 6. Déterminer la loi de $D = X - Y$ puis la loi de $P = XY$ où (X, Y) est le couple défini dans l'Exercice 2.

Exercice 7. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(q)$ deux variables de Bernoulli indépendantes. Déterminer la loi de XY .

Théorème 1.


- L'ensemble des valeurs prises par $Z = g(X, Y)$ est donné par :

$$Z(\Omega) = \{z = g(x, y) \mid x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)\}$$

- La loi de $Z = g(X, Y)$ est donnée par :

$$\forall z \in Z(\Omega), \quad P([Z = z]) = \sum_{(x,y) \mid g(x,y)=z} P([X = x] \cap [Y = y]),$$


la somme précédente portant sur l'ensemble des couples (x, y) vérifiant $g(x, y) = z$.

 **Méthode** (Loi d'une somme, d'une différence).

On obtient la loi de la somme (ou de la différence) deux variables aléatoires discrètes X et Y par application de la formule des probabilités totales avec au choix le s.c.e associé à X ou à Y .

Par exemple, avec le s.c.e associé à X , la loi de $X + Y$ est donnée par : $\forall z \in (X + Y)(\Omega)$,

$$P(X + Y = z) = \sum_{x \in X(\Omega)} P([X = x] \cap [X + Y = z]) = \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ z-x \in Y(\Omega)}} P([X = x] \cap [Y = z - x]).$$

 Noter que la probabilité $P([X = x] \cap [Y = z - x])$ est nulle dès que $z - x$ n'appartient pas à $Y(\Omega)$, ce qui a pour conséquence de restreindre les indices de la somme.

Exercice 8. Soient X et Y deux variables indépendantes suivant toutes deux la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

(1) Déterminer, en utilisant un s.c.e associé à X , $P(X = Y)$.

(2) Montrer, en utilisant un s.c.e associé à X que pour tout $n \geq 2$: $P(X + Y = n) = (n - 1)p^2q^{n-2}$.

Théorème 2 (Somme des lois classiques).

- **Somme de lois de Bernoulli.** Si X_1, X_2, \dots, X_n sont n variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p , alors

$$\sum_{k=1}^n X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

- **Stabilité des lois binomiales.** Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ deux lois binomiales indépendantes. Alors,

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + m, p).$$

- **Stabilité des lois de Poisson.** Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ deux lois de Poisson indépendantes. Alors,

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu).$$

Exercice 9. Soient X_1, \dots, X_k des variables aléatoires mutuellement indépendantes. Déterminer la loi de $X_1 + \dots + X_k$ lorsque $X_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_1), \dots, X_k \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda_k)$.

4 Calculs d'espérance

4.1 Espérance de $Z = g(X, Y)$ - Théorème de transfert

Si on a déjà calculé la loi de $Z = g(X, Y)$, on peut calculer son espérance avec la formule classique. Sinon, on peut utiliser le théorème suivant qui nécessite seulement de connaître la loi du couple.

Théorème 3 (Théorème de transfert). Soit (X, Y) deux variables aléatoires discrètes. Alors, on a sous réserve de convergence absolue :

$$E(Z) = E(g(X, Y)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} g(x, y) P([X = x] \cap [Y = y]).$$

Remarque 3. Si $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont deux ensembles finis, il n'y a pas de problème de convergence (absolue), puisqu'il s'agit alors d'une somme (double) finie. Dans le cas où (au moins) un des deux ensembles est infini, le caractère licite de l'écriture de la somme ci-dessus est conditionné par la convergence absolue d'une série à double indice et présente donc un problème assez subtil. Les sujets des problèmes de concours faisant intervenir ce type de somme proposent donc un guidage étape par étape pour en justifier l'existence d'une telle somme.

Exercice 10. Soient $D = X - Y$ et $P = XY$ où (X, Y) les variables aléatoires définies dans l'Exercice 2.

- (1) Déterminer l'espérance de $P = XY$ à l'aide du théorème de transfert.
- (2) Déterminer l'espérance de $D = X - Y$ à l'aide de la loi trouvée dans l'Exercice 6.

4.2 Espérance d'une somme

Proposition 3 (Linéarité de l'espérance).

- Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires discrètes admettant une espérance, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Alors :

$$E(\lambda_1 X_1 + \dots + \lambda_n X_n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i E(X_i).$$

- Lorsque les constantes sont égales à 1, on obtient le cas particulier important :

$$E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i).$$

Exercice 11. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires suivant toute la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Déterminer l'espérance de M .

4.3 Espérance d'un produit

Théorème 4. Soit (X, Y) deux variables aléatoires discrètes. Alors, on a

$$E(XY) = \sum_{x \in X(\Omega)} \sum_{y \in Y(\Omega)} xy P([X = x] \cap [Y = y]).$$

Théorème 5. Si X et Y sont *indépendantes* et admettent une espérance, alors XY admet une espérance, et on a

$$E(XY) = E(X)E(Y).$$

☞ On peut utiliser le théorème précédent pour montrer que deux variables aléatoires discrètes ne sont pas indépendantes en vérifiant que $E(XY) \neq E(X)E(Y)$.

Exercice 12. Soient X_1, X_2 , et X_3 , indépendantes, suivant des lois de Bernoulli de paramètre p . Montrer que les variables aléatoires $Y_1 = X_1 X_2$ et $Y_2 = X_2 X_3$ ne sont pas indépendantes.

5 Variance et covariance

5.1 Covariance

Définition 7. Soient (X, Y) deux variables aléatoires discrètes admettant des moments d'ordre 2.

La *covariance* de X et Y est définie par :

$$\text{cov}(X, Y) = E\left((X - E(X))(Y - E(Y))\right).$$

Théorème 6 (Formule de Koenig-Huygens). Soient (X, Y) deux variables aléatoires discrètes admettant des moments d'ordre 2. Alors :

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

En particulier, on a :

$$\text{cov}(X, X) = V(X)$$

Exercice 13. Déterminer la covariance des variables X et Y de l'Exercice 2 dans chaque cas.

Proposition 4 (Propriétés de la covariance).

- Symétrie : $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$.
- Linéarité à gauche : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{cov}(\lambda X_1 + \mu X_2, Y) = \lambda \text{cov}(X_1, Y) + \mu \text{cov}(X_2, Y)$.
- Linéarité à droite : $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \quad \text{cov}(X, \lambda Y_1 + \mu Y_2) = \lambda \text{cov}(X, Y_1) + \mu \text{cov}(X, Y_2)$.

Exercice 14. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que : $V(X + \lambda Y) = V(X) + 2\lambda \text{cov}(X, Y) + \lambda^2 V(Y)$.

Proposition 5. Si X et Y sont indépendantes, alors : $\text{cov}(X, Y) = 0$. **La réciproque est fautive !**

5.2 Variance d'une somme

Théorème 7.

- Si X et Y admettent une variance, alors $X + Y$ également, et :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \cdot \text{cov}(X, Y).$$

- Si X et Y sont indépendantes, et admettent une variance, alors $X + Y$ aussi, et on a :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y).$$

- Si les variables X_1, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes, et admettent une variance, alors la variable $X_1 + \dots + X_n$ admette une variance et on a :

$$V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n).$$

Exercice 15. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes suivant toute la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit $M = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Déterminer la variance de M .

5.3 Coefficient de corrélation linéaire

Définition 8. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires discrètes admettant des variances non nulles.

Le **coefficient de corrélation linéaire** de X et Y est : $\rho_{X,Y} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.

Théorème 8. Le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est un réel compris entre -1 et 1 :

$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1.$$

Exercice 16. On a obtenu dans l'Exercice 14 l'égalité suivante

$$V(X + \lambda Y) = V(X) + 2\lambda \text{cov}(X, Y) + \lambda^2 V(Y).$$

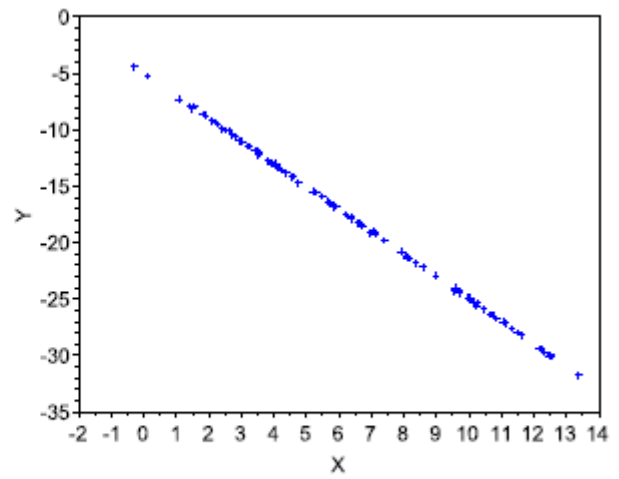
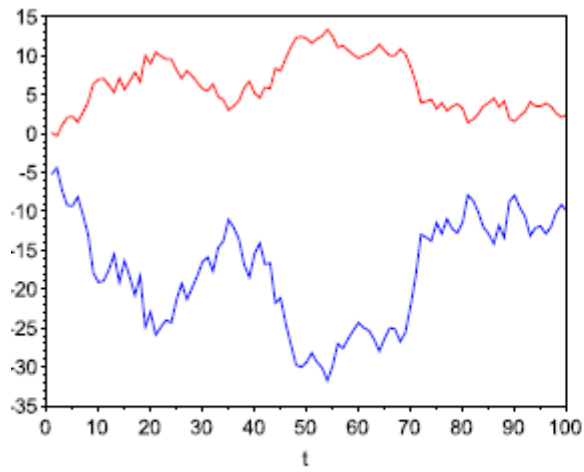
En étudiant le discriminant du polynôme en λ obtenu, montrer que : $|\rho_{X,Y}| \leq 1$.

Proposition 6. Le coefficient de corrélation linéaire de X et Y est un réel compris entre -1 et 1 :

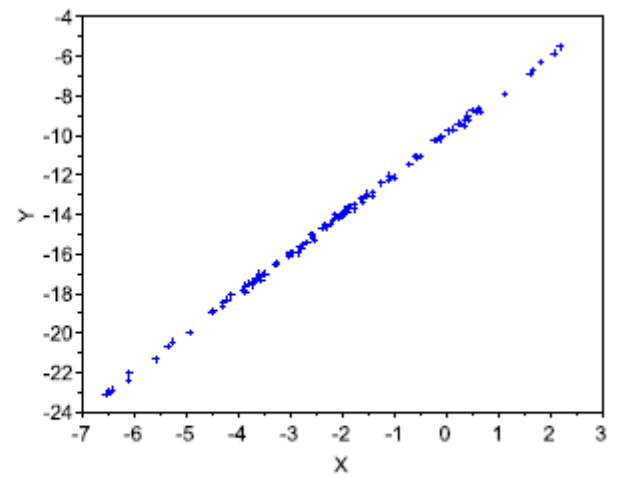
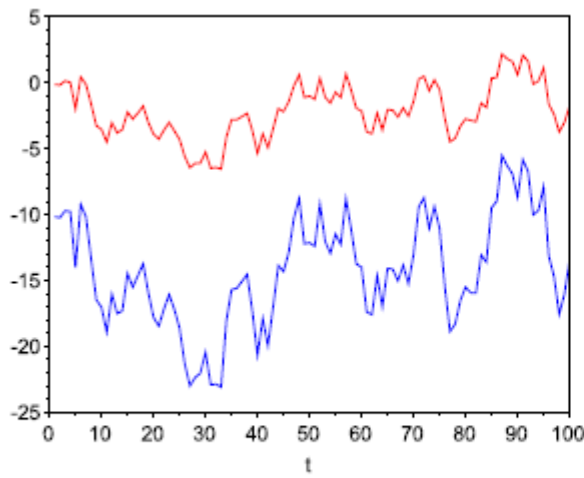
$$-1 \leq \rho_{X,Y} \leq 1$$

- Il est égal à 1 dans le cas où l'une des variables est fonction affine croissante de l'autre variable.
- Il est égal à -1 dans le cas où l'une des variables est fonction affine décroissante de l'autre variable.
- Les valeurs intermédiaires renseignent sur le degré de dépendance linéaire entre les deux variables.
 - Plus le coefficient $\rho_{X,Y}$ est proche des valeurs extrêmes -1 et 1 , plus la corrélation entre les variables est forte.
 - Deux variables aléatoires dont la covariance est nulle (et donc le coefficient de corrélation linéaire est nul) sont dites non corrélées.
 - Une corrélation positive ($\rho_{X,Y} > 0$) indique que les variables X et Y varient dans le même sens.
 - Une corrélation négative ($\rho_{X,Y} < 0$) indique que les variables X et Y varient en sens inverse.

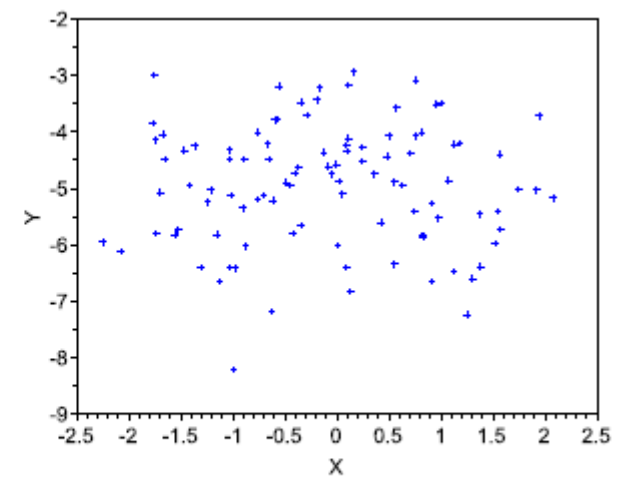
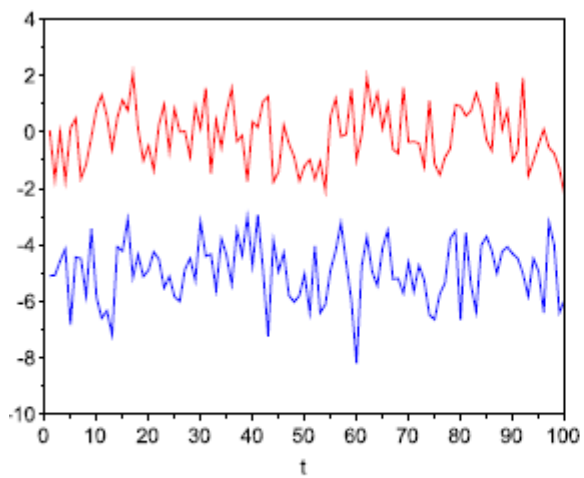
Exercice 17. Soit X une variable aléatoire discrète et $Y = 1 - 2X$. Déterminer la covariance de X et Y .



Corrélation négative



Corrélation positive



Corrélation nulle

6 Autres exercices

Exercice 501. Soit X une variable aléatoire (finie) dont la loi est donnée par le tableau ci-dessous

x	-2	-1	0	1	2
$P(X = x)$	1/6	1/4	1/6	1/4	1/6

et on définit ensuite $Y = X^2$.

- (1) Déterminer la loi du couple (X, Y) puis la loi de Y .
- (2) Déterminer $\text{cov}(X, Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 502. On lance simultanément deux dés à trois faces (numérotées de 1 à 3) et on note X le maximum des numéros obtenus et Y le minimum des numéros obtenus.

- (1) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .
- (2) Déterminer les lois marginales.
- (3) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
- (4) Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[Y \geq 2]$.
- (5) Déterminer la loi de la variable $Z = Y - X$ ainsi que son espérance.
- (6) Déterminer la covariance de X et de Y .

Exercice 503. Soit $a \in \mathbb{R}$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{N}^2 , de loi conjointe

$$P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{a}{2^{i+1}j!}.$$

- (1) Déterminer le réel a .
- (2) Déterminer les lois marginales.
- (3) X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 504. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et 2 boules noires numérotées 1 et 2. On tire une à une, sans remise, toutes les boules de l'urne et on définit deux variables aléatoires X et Y correspondant respectivement au rang d'apparition de la première boule blanche et de la boule numérotée 1.

- (1) Déterminer les lois de X et Y .
- (2) Les variables X et Y sont-elles indépendantes? Calculer $\rho_{X,Y}$.

Exercice 505. Une urne U_1 contient n boules numérotées de 1 à n . Une urne U_2 contient des boules rouges en proportion p . On tire une boule au hasard dans U_1 et on note X la variable aléatoire correspondant au numéro de la boule obtenue. Si $X = k$, on tire k fois, avec remise, une boule dans l'urne U_2 et on appelle Y le nombre de boules rouges tirées.

- (1) Déterminer la loi de X , son espérance et sa variance.
- (2) Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X = k$, pour $k \in X(\Omega)$.
- (3) Déterminer la loi du couple (X, Y) .
- (4) Déterminer l'espérance et la variance de Y .

Exercice 506. Soient X et Y telles que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et telles que la loi conditionnelle de Y , sachant $X = k$ (où $k \in X(\Omega)$) est une loi binomiale de paramètre $n - k$ et p . Quelle est la loi de Y ?

Exercice 507. Soient $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ que l'on suppose indépendantes. On définit $S = X_1 + X_2$ et $D = X_1 - X_2$. Calculer $\rho_{S,D}$. Les variables S et D sont-elles indépendantes?

Exercice 508. Un auto-stoppeur attend au péage d'une autoroute pendant une certaine période. On admet que le nombre de véhicules franchissant le péage pendant cette période est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. A chaque fois qu'un véhicule franchit le péage, il lance une pièce truquée qui donne pile avec la probabilité p . On pose $q = 1 - p$. On note N , X et Y respectivement le nombre de lancers, le nombre de piles obtenus et le nombre de face obtenus.

- (1) (a) Pour tout couple (i, j) d'entiers naturels, calculer la probabilité $P_{(N=j)}(X = i)$.
 (b) En déduire la loi du couple (X, N) .
 (c) Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre λp .
- (2) Expliquer sans aucun calcul pourquoi Y suit une loi de Poisson de paramètre λq .
- (3) Montrer que X et Y sont indépendantes.
- (4) (a) Montrer que : $V(Y) = V(N) + V(X) - 2\text{cov}(N, X)$.
 (b) En déduire $\text{cov}(N, X)$.
 (c) Donner de même $\text{cov}(N, Y)$.

Exercice 509. (D'après **EML 2013**) On considère une urne \mathcal{U} contenant n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher ($n \geq 2$). On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise de la boule dans l'urne \mathcal{U} .

Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire égale au nombre d'obtentions de la boule numéro i au cours des k premiers tirages.

- (1) Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Donner la loi de X_i . Rappeler l'espérance et la variance de X_i .
- (2) Les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n sont-elles indépendantes?
- (3) Soit $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$ tel que $i \neq j$.
 (a) Déterminer la loi de la variable $X_i + X_j$. Rappeler la variance de $X_i + X_j$.
 (b) En déduire la covariance du couple (X_i, X_j) .

Exercice 510. Un individu joue avec une pièce truquée donnant pile avec la probabilité $p \in]0; 1[$, de la façon suivante :

- Il lance la pièce jusqu'à obtenir pile pour la première fois. On note N la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires.
- Si n lancers ont été nécessaires pour obtenir pour la première fois pile alors il relance n fois sa pièce. On appelle alors X le nombre de pile obtenu au cours de ces n lancers.

On admet que

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$$

et on note $q = 1 - p$.

- (1) Déterminer la loi de N .
- (2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ déterminer la loi conditionnelle à $[N = n]$ de X .
- (3) En déduire la loi de X .
- (4) On considère B et G deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p')$ et une loi géométrique $\mathcal{G}(p')$.
 (a) Déterminer la loi de la variable aléatoire BG .
 (b) Montrer qu'il existe p' (à déterminer) tel que X a la même loi que la variable BG .
 (c) En déduire $E(X)$.

Exercice 511. On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce donnant pile avec probabilité p . On note $q = 1 - p$.

On dit que la première série est de longueur $n > 1$ si les n premiers lancers ont amené le même côté de la pièce et le $(n + 1)$ -ième l'autre côté. De même la deuxième série commence au lancer suivant la fin de la première série et se termine au lancer précédant un changement de côté.

Par exemple si les lancers donnent les résultats $FFPPPPPPFFFP \dots$ alors la première série est de longueur 2 et la deuxième est de longueur 6.

Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires égales aux longueurs de la première et deuxième série.

- (1) Déterminer la loi de X_1 .
- (2) Montrer que X_1 admet une espérance et que $E(X_1) = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}$.

- (3) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2) .
- (4) En déduire la loi de X_2 .
- (5) Montrer que X_2 admet une espérance et que $E(X_2) = 2$.
- (6) Montrer que $E(X_1 X_2)$ existe et que $E(X_1 X_2) = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$.
- (7) On suppose que $p = 1/2$. Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes.
- (8) On suppose que $p \neq 1/2$.
 - (a) En considérant $P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1])$ montrer que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.
 - (b) Vérifier que $\text{cov}(X_1, X_2) = 4 - \frac{1}{pq}$ puis en déduire une nouvelle preuve que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

Exercice 512. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. On considère une urne contenant 1 boule numérotée 1, 2 boules numérotées 2, ..., n boules numérotés n .

- (1) On tire une boule de cette urne, on note X le numéro obtenu. Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$.
- (2) On effectue dans cette urne deux tirages successifs sans remise. On note T_1 le numéro de la première boule obtenue et T_2 le numéro de la deuxième boule.
 - (a) Déterminer la loi du couple (T_1, T_2) .
 - (b) En déduire la loi des variables T_1 et T_2 .
 - (c) Les variables aléatoires T_1 et T_2 sont-elles indépendantes ?
 - (d) Déterminer $E(T_1 + T_2)$.

Exercice 513. On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n . La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k .

On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.

Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

- (1) Déterminer la loi du couple (X, Y)
- (2) Calculer $P(X = Y)$
- (3) Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

Exercice 514. (D'après **ESCP 1997**)

On effectue une suite d'expériences aléatoires consistant à jeter simultanément deux pièces de monnaie notées A et B . On suppose que ces expériences sont indépendantes et qu'à chaque expérience les résultats des deux pièces sont indépendants. On suppose que, lors d'une expérience, la probabilité que la pièce A donne pile est a , et que la probabilité que la pièce B donne pile est b . On considère la variable aléatoire X qui représente le nombre de piles obtenus avant que la pièce A donne face pour la première fois et la variable aléatoire Y qui représente le nombre de piles obtenus avant que la pièce B donne face pour la première fois.

- (1) Déterminer les lois de X et Y .
- (2) Montrer que la variable $Z = X + 1$ est une loi géométrique puis en déduire l'espérance et la variance de X .
- (3) Donner, pour tout entier naturel k , la valeur de $P(X \geq k)$.
- (4) On s'intéresse au nombre d'expériences qu'il faut réaliser avant que l'une au moins des pièces donne face pour la première fois. Pour cela on note M la variable aléatoire définie par $M = \min(X, Y)$.
 - (a) Calculer, pour tout entier naturel k , la probabilité $P(M \geq k)$.
 - (b) En déduire la loi de probabilité de M .
- (5) Montrer que la probabilité que la pièce B ne donne pas face avant la pièce A vaut

$$P(Y \geq X) = \frac{1-a}{1-ab}.$$

Exercice 515. (D'après **ECRICOME 2007**) Soucieux d'améliorer le flux de sa clientèle lors du passage en caisse, un gérant de magasin a réalisé les observations suivantes :

- (1) L'étude du mode de paiement en fonction du montant des achats a permis d'établir les probabilités suivantes :

$$P[S = 0 \cap U = 0] = 0.4$$

$$P[S = 0 \cap U = 1] = 0.3$$

$$P[S = 1 \cap U = 0] = 0.2$$

$$P[S = 1 \cap U = 1] = 0.1$$

où S représente la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros, prenant la valeur 1 sinon, et U la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon.

- (a) Déterminer les lois de S et U et vérifier que la probabilité que le client règle par carte bancaire est égale à $p = 3/5$.
- (b) Calculer la covariance du couple (S, U) . Les variables S et U sont-elles indépendantes ?
- (c) Quelle est la probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire ?
- (2) On suppose que les modes de règlement sont indépendants entre les individus.

Une caissière reçoit n clients dans sa journée ($n \geq 2$). On définit trois variables aléatoires C_n, L_1, L_2 par :

- C_n comptabilise le nombre de clients qui paient par carte bancaire.
- L_1 (resp. L_2) est égale au rang du 1^{er} (resp. du 2^{ème}) client utilisant la carte bancaire comme moyen de paiement, s'il y en a au moins un (resp. au moins deux) et à zéro sinon

- (a) Reconnaître la loi de C_n , rappeler la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable aléatoire.
- (b) Déterminer la loi de L_1 et vérifier que :

$$\sum_{k=0}^n P[L_1 = k] = 1.$$

- (c) Déterminer la loi de L_2 .

Exercice 516. (D'après HEC 2018)

Dans cette partie, on considère des variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n suivant chacune la même loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$, c'est à dire : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P([X_k = 1]) = p$ et $P([X_k = 0]) = 1 - p$.

On suppose que pour tout couple $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ avec $k \neq \ell$, le coefficient de corrélation linéaire des variables X_k et X_ℓ est le même; on note r ce coefficient. On a donc :

$$\forall (k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \frac{\text{Cov}(X_k, X_\ell)}{\sqrt{V(X_k)V(X_\ell)}} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = \ell \\ r, & \text{si } k \neq \ell \end{cases}$$

- (1) (a) Dans les cas (i) et (ii) suivants, calculer la valeur de r et exprimer la variance de la variable aléatoire $\sum_{k=1}^n X_k$ en fonction de n et p .
- (i) Les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n sont mutuellement indépendantes.
 - (ii) Les variables aléatoires X_1, X_2, \dots, X_n sont toutes égales.

De plus, préciser la loi de $\sum_{k=1}^n X_k$ dans chacun des deux cas précédents.

- (b) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la variance de la variable aléatoire $\sum_{i=1}^n X_i$ est donnée par la formule :

$$V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = kp(1-p)(1 + (k-1)r).$$

- (c) En déduire que le coefficient r est au moins égal à $-\frac{1}{n-1}$.

- (2) On suppose dans cette question que n est au moins égal à 2.
- (a) Montrer que r est égal à -1 si et seulement si on a : $P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = p(2p - 1)$.
 - (b) Que vaut alors $P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0])$?
 - (c) En déduire que le coefficient r ne peut-être égal à -1 que lorsque $p = 1/2$ et

$$P([X_1 + X_2 = 1]) = 1.$$

- (3) On suppose dans cette question que n est supérieur ou égal à 3 et que

$$P\left(\left[\sum_{k=1}^n X_k = 1\right]\right) = 1.$$

- (a) Exprimer les valeurs de p et r en fonction de n .
- (b) Déterminer les n -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ pour lesquels la probabilité

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n [X_k = x_k]\right)$$

est strictement positive et la calculer.