



## Chapitre 6. Applications Linéaires

Dans tout le chapitre, on désigne par  $E$  et  $F$  les espaces vectoriels  $(E, +, \cdot)$  et  $(F, +, \cdot)$ .

### 1 Généralités

**Définition 1.** On dit qu'une application  $\Phi : E \rightarrow F$  est **linéaire** si

- (i) Pour tous  $u, v \in E$ ,  $\Phi(u + v) = \Phi(u) + \Phi(v)$ ;
- (ii) Pour tout  $u \in E$ , pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\Phi(\lambda u) = \lambda \Phi(u)$ .

Lorsque  $E = F$  (et uniquement dans ce cas), on dit que  $\Phi$  est un **endomorphisme**.

☞ En particulier, si  $\Phi$  est linéaire, alors

$$\Phi(0_E) = 0_F.$$

☞ Il découle aussi immédiatement de la définition que, pour tout  $u \in E$

$$\Phi(-u) = -\Phi(u)$$

et, plus généralement, pour tous  $u_1, u_2, \dots, u_n \in E$  et tous  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$\Phi(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n) = \lambda_1 \Phi(u_1) + \lambda_2 \Phi(u_2) + \dots + \lambda_n \Phi(u_n).$$

☞ Une application linéaire entre deux espaces vectoriels est une application qui respecte la structure d'espace vectoriel entre  $E$  et  $F$ . Pour vérifier qu'une application donnée est bien une application linéaire, on utilise plutôt la définition équivalente ci-dessous.

**Proposition 1.** (Définition équivalente) Soit  $\Phi : E \rightarrow F$ . On a équivalence

- (i)  $\Phi$  est une application linéaire;
- (ii) Pour tous  $u, v \in E$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on a

$$\Phi(u + \lambda v) = \Phi(u) + \lambda \Phi(v). \quad (\star)$$

☞ Beaucoup d'exercices demandent de vérifier qu'une application définie au préalable est un endomorphisme; pour cela on vérifie donc deux choses

- Que l'application  $\Phi$  arrive bien dans l'espace vectoriel d'arrivée, *i.e.*

$$\forall u \in E, \quad \Phi(u) \in E$$

- Que l'application  $\Phi$  est bien linéaire à l'aide la relation  $(\star)$ .

☞ **Quelques exemples**

- (1) L'application **identité**  $\text{Id}_E : E \rightarrow E$ ,  $u \mapsto u$  est un endomorphisme de  $E$ .

- (2) L'application  $\Phi : E \rightarrow F$ ,  $u \mapsto 0_F$  est une application linéaire, appelée **application nulle**.
- (3) L'application  $\Phi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u = (x, y) \mapsto 2x - y$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
- (4) L'application  $\Phi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $u = (x, y) \mapsto (x + y, x - y, 3y)$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
- (5) L'application  $\Phi_3 : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $P \mapsto P(1)$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}_3[X]$  dans  $\mathbb{R}$ .
- (6) L'application  $\Phi_4 : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ ,  $P \mapsto P'$  est une application linéaire de  $\mathbb{R}_n[X]$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .
- (7) Soit  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ . L'application  $\Phi_5 : \mathcal{M}_{3,1} \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}$ ,  $X \mapsto AX$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_{3,1}$ . On reviendra longuement sur ce type d'application dans le paragraphe 4.
- (8) L'application  $\Phi_6 : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $M \mapsto {}^tM$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

**Exercice 1.** Les applications suivantes sont-elles des applications linéaires? Si oui, sont-elles des endomorphismes?

- (1)  $\Psi_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x \mapsto (x, 0)$ ;  
 (2)  $\Psi_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x \mapsto (2x, 1)$ ;  
 (3)  $\Psi_3 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $(x, y) \mapsto (x + 2y, y, -x)$ ;  
 (4)  $\Psi_4 : P \in \mathbb{R}_2[X] \mapsto P(X + 1)$ ;  
 (5)  $\Psi_5 : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ ,  $P \mapsto P(X + 1) - P(X)$ ;  
 (6)  $\Psi_6 : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}_3[X]$ ,  $P \mapsto X^2P(X) + 1$ ;  
 (7)  $\Psi_7 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $u = (u_n) \mapsto (u_{n+1})$ ;  
 (8)  $\Psi_8 : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$ ;  
 (9)  $\Psi_9 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a + c - d - b$ ;  
 (10)  $\Psi_{10} : \mathcal{M}_{3,1} \rightarrow \mathcal{M}_{3,1}$  définie par

$$\Psi_{10} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y + z \\ 2x - y - 3z \\ 3x - 2z \end{pmatrix}$$

- (11) Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension 3 et  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$  une base de  $E$ . On considère  $\Psi_{11} : E \rightarrow E$ ,

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \mapsto \lambda_1 u_2 + \lambda_2 u_3 + \lambda_3 u_1.$$

☞ Le dernier exemple de l'exercice précédent est important. Une application linéaire sur un espace vectoriel de dimension finie est parfaitement **définie par son action** sur les vecteurs de l'une des **bases** de l'espace.

**Exercice 2.** Soit  $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

- (1) Montrer que  $P$  est inversible.  
 (2) On considère l'application  $\Phi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ,  $M \mapsto P^{-1}MP$ .  
 (a) Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .  
 (b) Montrer que  $\Phi$  est bijectif. Expliciter  $\Phi^{-1}$ .

## 2 L'espace $\mathcal{L}(E, F)$

**Définition 2.** L'ensemble des applications linéaires de  $E$  dans  $F$  est noté  $\mathcal{L}(E, F)$ . L'ensemble des endomorphismes de  $E$  est noté  $\mathcal{L}(E)$ .

**Théorème 1.** L'ensemble  $\mathcal{L}(E, F)$  est un espace vectoriel. En particulier, si  $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors

$$f + g \in \mathcal{L}(E, F), \quad \text{et} \quad \lambda f \in \mathcal{L}(E, F).$$

**Proposition 2.** Soient  $E, F, G$  trois espaces vectoriels.

Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ , alors  $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ .

**Définition 3.** Selon les propriétés de l'application linéaire  $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$ , on précise la terminologie

- (i) Si  $\Phi$  est bijective, on dit que  $\Phi$  est un **isomorphisme** de  $E$  dans  $F$ ;
- (ii) Si  $E = F$ ,  $\Phi$  est un endomorphisme de  $E$ . Si de plus,  $\Phi$  est bijectif, on dit que  $\Phi$  est un **automorphisme** de  $E$ .

**Exercice 3.** Pour chacune des applications linéaires de l'Exercice 1, préciser si ce sont des isomorphismes ou automorphismes.

**Proposition 3.** Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est un isomorphisme, alors  $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ .

**Exercice 4.** Montrer que l'application

$$\Phi : (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \longmapsto (2a + b)X^3 + (b + 2c)X^2 + (2d - c)X + (a - d)$$

est un isomorphisme entre  $\mathbb{R}^4$  et  $\mathbb{R}_3[X]$ . Expliciter  $\Phi^{-1}$ .

**Proposition 4.** Soient  $E, F, G$  trois espaces vectoriels.

Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ , alors  $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ .

Si, de plus,  $f$  et  $g$  sont deux isomorphismes, alors  $g \circ f$  est un isomorphisme (de  $E$  dans  $G$ ) et

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

**Définition 4.** (Puissances d'un endomorphisme). Soit  $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note

$$\Phi^1 = \Phi, \quad \Phi^2 = \Phi \circ \Phi, \quad \dots, \quad \Phi^{n+1} = \Phi \circ \Phi^n$$

et

$$\Phi^0 = \text{Id}_E.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\Phi^n \in \mathcal{L}(E)$ .

**Exercice 5.** Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension  $n$  et  $\Phi$  un endomorphisme non nul de  $E$  tel que  $\Phi^n = 0$  (mais  $\Phi^{n-1} \neq 0$ ).

- (1) Montrer que  $\Phi$  n'est pas un automorphisme.
- (2) Montrer qu'il existe  $u \in E$  tel que la famille  $(u, \Phi(u), \Phi^2(u), \dots, \Phi^{n-1}(u))$  forme une base de  $E$ .

### 3 Noyau, Image, Rang

**Définition 5.** Soit  $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$ . On appelle **noyau** de  $\Phi$  l'ensemble, noté  $\text{Ker}(\Phi)$ , des vecteurs de  $E$  envoyés par  $\Phi$  sur le vecteur nul  $0_F$

$$\text{Ker}(\Phi) = \{u \in E : \Phi(u) = 0_F\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

☞ Comme  $\Phi$  est linéaire,  $\text{Ker}(\Phi)$  contient toujours au moins le vecteur nul de  $E$

$$0_E \in \text{Ker}(\Phi).$$

☞ Pour **déterminer le noyau**, on résout l'équation (ou le système d'équations) correspondant à

$$\Phi(u) = 0.$$

**Exercice 6.** Déterminer le noyau de chacune des applications linéaires ci-dessous

- (1)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, u = (x, y, z) \mapsto (x + y, y - z)$ ;
- (2)  $g : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^2, P \mapsto (P(1), P'(1))$ ;

$$(3) h : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M \mapsto AM - MA, \text{ où } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Proposition 5.** Soit  $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors

$$\Phi \text{ est injective} \iff \text{Ker}(\Phi) = \{0_E\}.$$

☞ La linéarité permet de ramener l'étude de l'injectivité de  $\Phi$  en 0. Ce résultat est crucial!

**Exercice 7.** Parmi les trois applications linéaires ci-dessous, lesquelles sont injectives?

$$(i) \quad f_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \\ (x, y, z) \mapsto (2x + 3y - 2z, x - z)$$

$$(ii) \quad f_2 : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}[X] ; \quad (iii) \quad f_3 : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ P \mapsto P' \quad \quad \quad M \mapsto {}^t M$$

**Définition 6.** Soit  $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$ . On appelle **image** de  $\Phi$  l'ensemble, noté  $\text{Im}(\Phi)$ , des vecteurs de  $F$  ("touchés") admettant un antécédent par  $\Phi$ :

$$\text{Im}(\Phi) = \{v \in F : \exists u \in E, v = \Phi(u)\} = \{\Phi(u) : u \in E\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

**Proposition 6.** Soit  $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors

$$\Phi \text{ est surjective} \iff \text{Im}(\Phi) = F.$$

☞ Le caractère linéaire permet de voir immédiatement que, si  $E$  est de dimension finie et que  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  est une base de  $E$ ,

$$\text{Im}(\Phi) = \text{Vect}(\Phi(u_1), \Phi(u_2), \dots, \Phi(u_n)).$$

Pour **déterminer** l'image, on détermine donc le sous-espace engendré par les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ.

**Exercice 8.** Pour chacune des applications linéaires de l'Exercice 7, déterminer l'image et préciser si l'application est surjective ou non.

**Définition 7.** Soient  $E$  un espace de **dimension finie** et  $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$ . On appelle **rang** de  $\Phi$  la dimension de l'image de  $\Phi$

$$\text{rg}(\Phi) = \dim(\text{Im}(\Phi)).$$

On a toujours

$$\text{rg}(\Phi) \leq \dim(E).$$

☞ Si  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  est une base quelconque de  $E$ ,

$$\text{rg}(\Phi) = \dim(\text{Vect}(\Phi(u_1), \Phi(u_2), \dots, \Phi(u_n))).$$

☞ Si  $F$  est également de dimension finie, alors  $\text{rg}(\Phi) \leq \dim(F)$  et on a

$$\Phi \text{ surjective} \iff \text{Im}(\Phi) = F \iff \text{rg}(\Phi) = \dim(F).$$

**Exercice 9.** Déterminer le rang de l'application

$$\Phi : \mathcal{M}_2 \rightarrow \mathcal{M}_2 \\ M \mapsto M + {}^t M$$

**Théorème 2.** (Théorème du rang). Soient  $E$  un espace de dimension finie et  $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(\Phi)) + \text{rg}(\Phi).$$

☞ On observe que **seule** la dimension de l'espace de départ intervient dans le théorème du rang.

**Exercice 10.** Déterminer le rang de l'application linéaire

$$f : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \longmapsto (a + e + i, c + e + g, a + c + g + i)$$

**Exercice 11.** Soit  $f$  un endomorphisme non nul d'une espace vectoriel  $E$  de dimension 3 tel que  $f \circ f = 0$ .

- (1) Montrer que  $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ .
- (2) En déduire que  $\dim(\text{Ker}(f)) \geq 2$ .
- (3) Conclure que  $\text{rg}(f) = 1$ .

**Corollaire 1.** Soient  $E$  un espace de dimension finie et  $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Si  $F$  est également de dimension finie, alors

- (i) Si  $\dim(E) < \dim(F)$ , alors  $\Phi$  n'est pas surjective;
- (ii) Si  $\dim(F) < \dim(E)$ , alors  $\Phi$  n'est pas injective;
- (iii) Si  $\dim(E) = \dim(F)$ , alors on a équivalence

$$\Phi \text{ est un isomorphisme} \iff \Phi \text{ est injectif} \iff \Phi \text{ est surjectif.}$$

☞ En prenant  $E = F$  dans le résultat précédent, on obtient l'équivalence suivante

**Corollaire 2.** (Endomorphismes et bijectivité) Soient  $E$  un espace de dimension finie et  $\Phi \in \mathcal{L}(E)$ . On a équivalence

$$\begin{aligned} \Phi \text{ est un automorphisme} &\iff \Phi \text{ est injectif} \\ &\iff \text{Ker}(\Phi) = \{0_E\} \\ &\iff \text{Im}(\Phi) = E \\ &\iff \text{rg}(\Phi) = \dim(E) \\ &\iff \Phi \text{ est surjectif.} \end{aligned}$$

☞ Ainsi, il suffit la plupart du temps de vérifier qu'un endomorphisme est injectif (car c'est souvent plus facile que surjectif) en déterminant son noyau pour obtenir le caractère bijectif.

☞ Par ailleurs, si  $\Phi$  est un isomorphisme entre deux espaces  $E$  et  $F$  de dimensions finies, alors nécessairement les dimensions sont égales. On peut se servir de ce résultat pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel.

## 4 Un cas particulier important d'application linéaire

### 4.1 Application linéaire associée à une matrice

**Définition 8.** Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors, l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array}$$

est une application linéaire, dite application linéaire **canoniquement associée** à  $A$ .

### 4.2 Noyau, image d'une matrice

**Définition 9.** Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On appelle **noyau** de  $A$ , et on note  $\text{Ker}(A)$ , le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  défini par :

$$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}.$$

**Définition 10.** Soit

$$A = \begin{pmatrix} | & | & \cdots & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_p \\ | & | & \cdots & | \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$$

une matrice. On appelle **image** de la matrice  $A$ , et on note  $\text{Im}(A)$ , le sous-ensemble de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  défini par :

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_p).$$

Ainsi, on retrouve la définition du **rang** de la matrice  $A$ .

$$\text{rg}(A) = \dim(\text{Im}(A)) = \dim(\text{Vect}(C_1, C_2, \dots, C_p)).$$

### 4.3 Théorème du rang et applications

**Théorème 3.** (Théorème du rang pour les matrices) Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors :

$$\dim(\text{Ker}(A)) + \text{rg}(A) = n.$$

**Théorème 4** (Caractérisation de l'inversibilité).

$$A \text{ est inversible} \iff \text{Ker}(A) = \{0\} \iff \text{rg}(A) = n.$$

**Exercice 12.** Discuter sans calcul de l'inversibilité des matrices ci-dessous

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 13.** On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  et  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

- (1) Déterminer le rang de  $A$ .
- (2) Calculer  $AU$ .
- (3) En déduire  $\text{Ker}(A)$ .

## 5 Matrice d'une application linéaire dans une base

On va voir que tout endomorphisme en dimension finie peut finalement se représenter sous la forme du cas particulier précédent.

### 5.1 Action d'une application linéaire sur une base

**Proposition 7.** Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors,  $\Phi$  est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base de  $E$ .

☞ Le résultat précédent signifie qu'il suffit de connaître les images des vecteurs d'une base quelconque de l'espace de départ pour "connaître"  $\Phi$ .

**Proposition 8.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimensions finies et  $\Phi$  et  $\Psi$  deux applications linéaires de  $E$  dans  $F$ . Si  $\Phi$  et  $\Psi$  coïncident sur les vecteurs d'une base de  $E$ , alors  $\Phi = \Psi$ .

☞ Les propriétés d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité se traduisent sur la famille des images des vecteurs de la base de départ. On rappelle au lecteur que si  $(u_1, \dots, u_n)$  est une base de  $E$ , alors

$$\text{Im}(\Phi) = \text{Vect}(\Phi(u_1), \dots, \Phi(u_n)).$$

**Proposition 9.** Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$ . Soit  $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  est une base de  $E$ . Alors,

- (i)  $\Phi$  est injective si et seulement si  $(\Phi(u_1), \Phi(u_2), \dots, \Phi(u_n))$  est libre;
- (ii)  $\Phi$  est surjective si et seulement si  $(\Phi(u_1), \Phi(u_2), \dots, \Phi(u_n))$  est génératrice dans  $F$ ;
- (iii)  $\Phi$  est bijective si et seulement si  $(\Phi(u_1), \Phi(u_2), \dots, \Phi(u_n))$  est une base de  $F$ .

☞ En particulier, un isomorphisme envoie une base de  $E$  sur une base de  $F$ .

## 5.2 Matrice associée à une application linéaire

**Définition 11.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie,  $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$  une base de  $F$  et  $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$ .

La matrice de  $\Phi$  dans les bases  $\mathcal{B}_E$  et  $\mathcal{B}_F$  est la matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}$  dont les colonnes sont constituées des coordonnées dans la base  $\mathcal{B}_F$  des vecteurs  $\Phi(e_i)$  (pour  $1 \leq i \leq p$ ). Plus précisément,

$$A = \text{Mat}(\Phi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$$

où, pour tout  $1 \leq j \leq p$ ,

$$\Phi(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i.$$

Lorsque  $E = F$ , alors la matrice  $A$  est simplement notée  $\text{Mat}(\Phi, \mathcal{B}_E)$ .

☞ On insiste sur le fait que la matrice d'une application linéaire n'a de sens que si les bases de départ et d'arrivée sont précisées.

☞ Attention, si on change l'ordre des vecteurs dans les bases, on change la matrice de l'application.

☞ La matrice de l'application identité (de  $E$  dans  $E$ , avec  $\dim(E) = n$ ) est la matrice identité

$$\text{Mat}(\text{Id}_E, \mathcal{B}_E) = I_n.$$

**Exercice 14.** Déterminer la matrice dans les bases canoniques des applications linéaires suivantes

$$\begin{aligned} (i) f_1 : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 ; \\ (x, y, z) &\mapsto (2x - y + z, y - 3z, x + 2z) \\ (ii) f_2 : \mathbb{R}_2[X] &\rightarrow \mathbb{R}_2[X] ; & (iii) f_3 : \mathcal{M}_2 &\rightarrow \mathcal{M}_2 ; \\ P &\mapsto P' & M &\mapsto {}^t M \end{aligned}$$

**Proposition 10.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie,  $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$  une base de  $F$  et  $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$ .

On note  $A = \text{Mat}(\Phi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F)$ .

Soient  $u \in E$  et  $v \in F$ . Si  $X \in \mathcal{M}_{p,1}$  représente les coordonnées de  $u$  dans  $\mathcal{B}_E$  et  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}$  représente les coordonnées de  $v$  dans  $\mathcal{B}_F$ , alors

$$v = \Phi(u) \iff Y = AX.$$

☞ Une application linéaire, en dimension finie n'est donc rien d'autre qu'une multiplication matricielle sur les coordonnées d'un vecteur dans une certaine base.

**Proposition 11.** (Opérations sur les matrices d'applications linéaires). Soient  $E, F, G$  trois espaces vectoriels de dimension finie et  $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$  trois bases correspondant à chaque espace.

(1) Si  $\Phi, \Psi \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ , alors

$$\text{Mat}(\lambda\Phi + \mu\Psi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) = \lambda\text{Mat}(\Phi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) + \mu\text{Mat}(\Psi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F).$$

(2) Si  $\Phi \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\Psi \in \mathcal{L}(F, G)$ , alors

$$\text{Mat}(\Psi \circ \Phi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_G) = \text{Mat}(\Psi, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G) \cdot \text{Mat}(\Phi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F).$$

(3) Si  $\Phi \in \mathcal{L}(E)$  et  $n \in \mathbb{N}$ , alors  $\text{Mat}(\Phi^n, \mathcal{B}_E) = \text{Mat}(\Phi, \mathcal{B}_E)^n$ .

**Exercice 15.** Soient  $s, d \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$  définis par  $s(P) = P(X + 1)$  et  $d(P) = P'$ .

- (1) Déterminer les matrices de  $s$  et  $d$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
- (2) En déduire la matrice de l'endomorphisme  $t : P \mapsto P(X + 2)$ .
- (3) Déterminer la matrice de l'endomorphisme  $u : P \mapsto P'(X + 1)$ .

☞ Toutes les propriétés d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité sur  $\Phi$  sont équivalentes aux mêmes propriétés sur la matrice de  $\Phi$  dans des bases quelconques.

**Proposition 12.** Soient  $\Phi$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ ,  $\mathcal{B}_E$  une base de  $E$  et  $A$  la matrice de  $\Phi$  dans la base  $\mathcal{B}_E$ . Alors

$$\begin{aligned} \Phi \text{ est un automorphisme} &\iff \Phi \text{ est injectif} \\ &\iff \Phi \text{ est surjectif} \\ &\iff \text{Ker}(\Phi) = \{0_E\} \\ &\iff \text{Im}(\Phi) = E \\ &\iff \text{Ker}(A) = \{0_{\mathcal{M}_{n,1}}\} \\ &\iff \text{Im}(A) = \mathcal{M}_{n,1} \\ &\iff A \text{ est inversible} \end{aligned}$$

☞ Si  $\Phi \in \mathcal{L}(E)$  est un automorphisme et  $n \in \mathbb{Z}$ , alors  $\text{Mat}(\Phi^n, \mathcal{B}_E) = \text{Mat}(\Phi, \mathcal{B}_E)^n$ .

**Théorème 5.** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimensions finies respectives  $p$  et  $n$ ,  $\mathcal{B}_E$  une base de  $E$ , et  $\mathcal{B}_F$  une base de  $F$ . L'application linéaire

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \\ \Phi &\longmapsto \text{Mat}(\Phi, \mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. En particulier,  $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = np = \dim(E) \times \dim(F)$ .

## 6 Matrices semblables

### 6.1 Matrices de passage

**Définition 12.** Soient  $E$  un espace de dimension finie et  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . On appelle matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  la matrice de l'application  $\text{Id}_E$  entre  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{B}$

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \text{Mat}(\text{Id}_E, \mathcal{B}', \mathcal{B})$$

Il s'agit de la matrice dont les colonnes sont composées des coordonnées des vecteurs de la nouvelle base  $\mathcal{B}'$  exprimées dans l'ancienne base  $\mathcal{B}$ .

C'est une matrice inversible. De plus,

$$(P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1} = \text{Mat}(\text{Id}_E, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$$

☞ On note parfois  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ .

**Exercice 16.** Soit  $\mathcal{C} = (P_0, P_1, P_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

Soit  $\mathcal{C}' = (R_0, R_1, R_2)$ , où

$$R_0(X) = 1, \quad R_1(X) = X - 1, \quad \text{et} \quad R_2(X) = (X - 1)^2,$$

une autre base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

Déterminer la matrice de passage  $P$  de  $\mathcal{C}$  à  $\mathcal{C}'$  puis la matrice de passage  $Q$  de  $\mathcal{C}'$  à  $\mathcal{C}$ .

**Proposition 13.** Soient  $E$  un espace de dimension finie  $n$  et  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ .

Soit  $u \in E$ . On note  $X \in \mathcal{M}_{n,1}$  les coordonnées de  $u$  dans la base  $\mathcal{B}$  et  $Y \in \mathcal{M}_{n,1}$  celles dans la base  $\mathcal{B}'$ . Alors,

$$Y = (P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1} X, \quad \text{ou encore} \quad X = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} Y.$$



**Exercice 17.** Soit  $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

Soit  $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ , où  $u = (1, -1, 1)$ ,  $v = (0, 1, 1)$  et  $w = (0, 1, -1)$ , une autre base de  $\mathbb{R}^3$ .

(1) Déterminer la matrice de passage  $R$  de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ .

(2) Vérifier que la matrice de passage  $S = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$  est  $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ .

## 6.2 Formule de changement de base

**Proposition 14.** Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de l'espace vectoriel  $E$  et  $\Phi$  un endomorphisme de  $E$ . Alors,

$$\text{Mat}(\Phi, \mathcal{B}) = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \text{Mat}(\Phi, \mathcal{B}') (P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1}$$

ou de manière équivalente

$$\text{Mat}(\Phi, \mathcal{B}') = (P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1} \text{Mat}(\Phi, \mathcal{B}') P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$$

**Exercice 18.** Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On pose :  $u = (1, 2, -1)$ ,  $v = (1, 1, 0)$ ,  $w = (2, 0, 1)$ .

(1) Calculer  $f(u)$ .

(2) Montrer que  $\text{Ker}(f - id) = \text{Vect}(v, w)$ .

(3) Montrer que  $\mathcal{B}' = (u, v, w)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

(4) Déterminer la matrice  $A'$  de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

(5) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $f^n(u)$ .

☞ L'idée est alors de trouver une base dans laquelle la matrice qui représente l'endomorphisme est diagonale (ou au moins triangulaire), celle-ci rendant par exemple le calcul des puissances nettement plus simple. C'est tout l'objet du chapitre intitulé *Réduction des endomorphismes*.

## 6.3 Matrices semblables

**Définition 13.** Deux matrices  $M$  et  $M'$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  sont dites **semblables** s'il existe  $P \in \text{Gl}_n(\mathbb{R})$  telle que

$$M' = P^{-1}MP.$$

☞ En d'autres termes, deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes. La matrice  $P$  est alors la matrice de passage entre ces deux bases.

**Proposition 15.** Deux matrices semblables ont le même rang.

**Proposition 16.** Soient  $M$  et  $N$  deux matrices semblables telles que  $M = P^{-1}NP$ . Alors, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$M^k = P^{-1}N^kP.$$

☞ La preuve est une récurrence facile qu'il faut savoir refaire.

## 7 Autres exercices

**Exercice 601.** Déterminer la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ .

(1)  $\mathcal{B}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{B}' = (u, v, w)$  avec  $u = (1, 1, 1)$ ,  $v = (1, -1, 0)$  et  $w = (1, 1, -2)$ .

(2)  $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$  et  $\mathcal{B}' = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ .

(3)  $\mathcal{B}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$  et  $\mathcal{B}' = (-X^2 + 2X + 1, X + 1, X^2 + 2)$

(4)  $\mathcal{B} = (1, X - 2, X^2 - 3X + 3)$  et  $\mathcal{B}'$  est la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

**Exercice 602.** On note  $(J_1, J_2, J_3, J_4)$  la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ . Soit  $f$  l'application définie sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  par

$$f : M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mapsto M + (a + d)I_2.$$

- (1) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- (2) Déterminer la matrice  $A$  de  $f$  dans la base  $(J_1, J_2, J_3, J_4)$ .
- (3) (a) Montrer que  $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I_2)$  est une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .  
(b) Déterminer la matrice  $D$  de  $f$  dans cette base.
- (4) Montrer que  $f$  est un automorphisme de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Exercice 603.** (\*\*)

- (1) (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\varphi : P(X) \mapsto (1 - X^2)P''(X) - 3XP'(X)$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .  
(b) Calculer  $\varphi(1)$ . L'endomorphisme  $\varphi$  est-il un automorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$  ?
- (2) Dans cette question, on prend  $n = 3$ .  
(a) Donner la matrice de  $\varphi$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$ .  
(b) Déterminer une base de  $\text{Im}(\varphi)$  et une base de  $\text{Ker}(\varphi)$ .

**Exercice 604.** (D'après **L'école de la vie**) On considère l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^4$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) Justifier, **sans aucun calcul** que  $f$  est un automorphisme.
- (2) Vérifier que  $f \circ f \circ f \circ f = \text{Id}$  (sans aucun calcul non plus) et en déduire l'expression de  $A^{-1}$  en fonction de  $A$ .
- (3) Déterminer  $E_1 = \text{Ker}(f - \text{Id})$  et  $E_{-1} = \text{Ker}(f + \text{Id})$ .

On considère maintenant l'espace vectoriel  $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$  des matrices carrées  $2 \times 2$  à coefficients réels dont la base canonique est notée  $\mathcal{C} = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$  où

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Enfin, on s'intéresse à l'application  $u$  définie sur  $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$  définie par

$$u : M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}.$$

- (5) Montrer que  $u$  est un endomorphisme.
- (6) Donner la matrice de  $u$  dans la base canonique.

**Exercice 605.** (\*\*\*) Soient  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des réels **distincts**. Montrer que, pour tout  $(n + 1)$ -uplet  $(b_0, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , il existe un unique polynôme  $P$  de degré  $n$  tel que

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P(a_i) = b_i.$$

Ce polynôme s'appelle le *polynôme interpolateur de Lagrange*.

**Exercice 606.** (Inspiré par **HEC 2015**, Oral avec préparation).

- (1) On considère l'application  $\Phi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ ,  $P \mapsto P(X+1) - P(X-1)$ .
- (a) Montrer que  $\Phi$  est un endomorphisme.
- (b) Déterminer le noyau de  $\Phi$ . L'endomorphisme  $\Phi$  est-il bijectif?

- (2) On considère maintenant l'application  $T : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$  par

$$T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt.$$

- (a) Montrer que, pour tout  $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ ,  $T(f) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ . En déduire que  $T$  n'est pas bijectif.
- (b) On considère maintenant l'endomorphisme induit par  $T$  sur  $\mathbb{R}_n[X]$ , que l'on note  $\tilde{T}$ . Ce dernier est-il bijectif?

**Exercice 607.** (D'après **EDHEC 2017**) On note  $E$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille  $(e_0, e_1, e_2)$  est une base de  $E$ , les fonctions  $e_0, e_1, e_2$  étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e_0(t) = 1 \quad e_1(t) = t \quad e_2(t) = t^2$$

On considère l'application  $\varphi$  qui, à toute fonction  $P$  de  $E$ , associe la fonction, notée  $\varphi(P)$ , définie par:

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t) dt$$

- (1) (a) Montrer que  $\varphi$  est linéaire.
- (b) Déterminer  $(\varphi(e_0))(x)$ ,  $(\varphi(e_1))(x)$  et  $(\varphi(e_2))(x)$  en fonction de  $x$ , puis écrire  $\varphi(e_0)$ ,  $\varphi(e_1)$  et  $\varphi(e_2)$  comme combinaison linéaire de  $e_0, e_1$  et  $e_2$ .
- (c) Déduire des questions précédentes que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $E$ .
- (2) (a) Écrire la matrice  $A$  de  $\varphi$  dans la base  $(e_0, e_1, e_2)$ . On vérifiera que la première ligne de  $A$  est:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- (b) Justifier que  $\varphi$  est un automorphisme de  $E$ .

- (3) Compléter les commandes **Scilab** suivantes pour que soit affichée la matrice  $A^n$  pour une valeur de  $n$  entrée par l'utilisateur :

```
n=input('n=?')
A=[.....]
disp(.....)
```

- (4) (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel  $n$ , il existe un réel  $u_n$  tel que l'on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Donner  $u_0$  et établir que :  $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{6}(3n+2)$ .

- (b) En déduire, par sommation, l'expression de  $u_n$  pour tout entier  $n$ .
- (c) Écrire  $A^n$  sous forme de tableau matriciel.

**Exercice 608.** (D'après **EDHEC 2004**)

On note  $E$  l'espace vectoriel des fonctions polynomiale réelles de degré inférieur ou égal à 2.

On note  $e_0, e_1, e_2$  les fonctions définies, pour tout réel  $x$  par  $e_0(x) = 1$ ,  $e_1(x) = x$  et  $e_2(x) = x^2$  et on rappelle que  $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$  est une base de  $E$ .

Soit  $f$  l'application qui à toute fonction polynômiale  $P$  de  $E$  associe la fonction  $Q = f(P)$ , où  $Q$  est la dérivée seconde de l'application qui à tout réel  $x$  associe  $(x^2 - x)P(x)$ .

- (1) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
- (2) Déterminer  $f(e_0)$ ,  $f(e_1)$ , et  $f(e_2)$  en fonction de  $e_0$ ,  $e_1$  et  $e_2$ .
- (3) En déduire que la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$  est  $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$
- (4) Montrer sans calcul que  $f$  est un automorphisme de  $E$ .

**Exercice 609.** (D'après **EML 2010**).

- On note  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 2.
- On note  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- On note  $\mathcal{S}_2$  l'ensemble des matrices carrées symétriques d'ordre 2.

- (1) Calculer les produits  $AFA$ ,  $AGA$ ,  $AHA$ .
- (2) (a) Montrer que  $\mathcal{S}_2$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et que  $(F, G, H)$  est une base de  $\mathcal{S}_2$ .  
(b) Déterminer la dimension de  $\mathcal{S}_2$ .

On note  $u$  l'application définie sur  $\mathcal{S}_2$  par

$$u : S \longmapsto ASA.$$

- (3) (a) Montrer :  $\forall S \in \mathcal{S}_2, u(S) \in \mathcal{S}_2$ .  
(b) Montrer que  $u$  est un endomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathcal{S}_2$ .  
(c) Donner la matrice de  $u$  dans la base  $(F, G, H)$  de  $\mathcal{S}_2$ .

**Exercice 610.** (Extrait de **DS n°4**, ECE1, Printemps 2018) On considère la matrice  $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme  $f$  de  $\mathbb{R}^4$  dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  de  $\mathbb{R}^4$  est  $A$ .

- (1) Montrer, sans pivot, que  $A$  n'est pas inversible et déterminer  $\text{Im}(f)$ .
- (2) (a) Calculer  $A^2$ ,  $A^3$ ,  $A^4$ .  
(b) Déterminer noyau de  $f$  et préciser sa dimension.
- (3) (a) Montrer que si il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $u \in \mathbb{R}^4$ , avec  $u \neq 0$  et  $f(u) = \lambda u$ , alors  $f^4(u) = \lambda^4 u$ . En déduire que  $\lambda^4 = 0$  puis que  $\lambda = 0$ .  
(b) Existe-t-il une base de  $\mathbb{R}^4$  dans laquelle la matrice de  $f$  est diagonale?
- (4) On note

$$\varepsilon_1 = e_1, \quad \varepsilon_2 = f(\varepsilon_1), \quad \varepsilon_3 = f(\varepsilon_2), \quad \varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$$

et  $\mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$ .

- (a) Montrer que  $\mathcal{C}$  est une base de  $\mathbb{R}^4$ .
- (b) Déterminer la matrice  $N$  de  $f$  relativement à la base  $\mathcal{C}$  de  $\mathbb{R}^4$ .
- (5) Existe-t-il un endomorphisme bijectif  $g$  de l'espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$  tel que  $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$  ?