ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

# Chapitre 7. Rappels et compléments sur les intégrales impropres

On sait définir l'intégrale d'une fonction $f$ sur un intervalle $[a;b]$ **fermé** lorsque celle-ci y est continue

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t.$$

(On encourage d'ailleurs tout lecteur à reprendre le Chapitre 16 du cours de première année.) L'objectif de ce chapitre est de définir, lorsque cela est possible l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle **ouvert** $]a;b[$, où les bornes $a$ et $b$ pourraient éventuellement être infinies.

Certaines de ces notions ayant été déjà introduites dans le cours de première année (voir Chapitre 17), ces résultats sont présentés ici de manière assez succincte mais n'en demeurent pas moins très importants.

Pour alléger les notations que l'on essaie de présenter de la façon la plus générale possible, on adopte la notation classique suivante. On dit que $a \in \overline{\mathbb{R}}$ si $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, c'est à dire si $a$ est un nombre réel ou l'infini.

## 1 Extension de la notion d'intégrale

**Définition 1.** *Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle **semi-ouvert** $[a;b[$. On dit que l'intégrale*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

*est **impropre** en $b$. Si la fonction est continue sur l'intervalle semi-ouvert $]a;b]$, l'intégrale précédente est alors impropre en $a$.*

☞ L'étude d'une intégrale impropre commence par la recherche des valeurs générant ce caractère impropre, c'est à dire par l'étude de la continuité de la fonction intégrée.

Lors de l'étude de continuité de la fonction intégrée, celle-ci peut s'avérer avoir une limite ou bien être prolongeable par continuité et dans ce cas, on est ramené à calculer l'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle fermé.

**Proposition 1.** Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert $[a;b[$ admettant une limite finie en $b$ (*i.e.* prolongeable par continuité à $b$). On dit que l'intégrale

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

est **faussement impropre** (en $b$) et que c'est une intégrale ***convergente***.

**Exercice 1.** Que peut-on dire des intégrales suivantes?

$$(i)\ \int_0^1 t\ln(t)\mathrm{d}t, \qquad (ii)\ \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x-1}\mathrm{d}x$$

## 1.1 Intégrale convergente sur un intervalle du type $[a;+\infty[$ ou $]-\infty;a]$

**Définition 2** (Convergence d'une intégrale impropre)**.**
*Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle semi-ouvert $[a\,;\,+\infty[$.*

*(1) On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ est **convergente** lorsque la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $x$ tend vers $+\infty$, et dans ce cas, on pose*

$$\int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

*(2) Sinon, on dit que l'intégrale **diverge**.*
*(3) On définit de la même façon lorsque $f$ est continue sur $]-\infty;a]$,*

$$\int_{-\infty}^a f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to-\infty}\int_x^a f(t)\mathrm{d}t.$$

☞ Étudier la nature d'une intégrale signifie déterminer si l'intégrale est convergente ou non.

**Exercice 2.** Déterminer la nature des intégrales suivantes

$$(i)\ \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\mathrm{d}t, \qquad (ii)\ \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t}, \qquad (iii)\ \int_e^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t\ln(t)}.$$

## 1.2 Sur un intervalle du type $[a;b[$ ou $]a;b]$

**Définition 3.** *Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle semi-ouvert $]a;b]$.*

*(1) On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est **convergente** lorsque la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie quand $x$ tend vers $a$, et dans ce cas, on pose*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to a}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t.$$

*(2) Si l'intégrale n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.*
*(3) De la même manière, on définit la (convergence de) l'intégrale sur $[a;b[$*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t.$$

**Exercice 3.** Quelle est la nature des intégrales suivantes?

$$(i)\ \int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t, \qquad (ii)\ \int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t}, \qquad (iii)\ \int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x.$$

## 1.3 Sur un intervalle du type $]a;b[$, avec $a,b\in\overline{\mathbb{R}}$

**Définition 4.** *Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ (où $-\infty \le a < b \le +\infty$). Alors, on dit que l'intégrale*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

*converge si et seulement si les intégrales*

$$\int_a^c f(t)\mathrm{d}t \qquad \textbf{\textit{et}} \qquad \int_c^b f(t)\mathrm{d}t$$

*convergent pour tout réel $c \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, on a*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t.$$

**Exercice 4.** Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto -\exp\left((-\sqrt{x}\right)$ puis étudier la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t.$$

☞ Les notions d'intégrales convergentes (redéfinies ci-dessus) peuvent naturellement être étendus aux fonctions continues par morceaux et notamment aux fonctions présentant un **nombre fini de points de discontinuité.**

**Exercice 5.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Justifier de la convergence et calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t.$$

# 2 Techniques de calcul

Les propriétés sur les intégrales impropres (linéarité, positivité, croissance) découlent de celles sur les intégrales définies sur un segment par restriction de l'intervalle et passage à la limite.

## 2.1 Intégration par parties ou changement de variables

✎ **Méthode.** (IPP ou un changement de variable sur des intégrales impropres.)

Soit $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[a; b[$ (avec $b \in \overline{\mathbb{R}}$) dont l'intégrale impropre sur le même intervalle converge.

Pour **calculer** cette intégrale impropre en intégrant par partie ou par changement de variable, on suit les étapes suivantes.

(1) On **restreint l'intervalle d'intégration** à $[a\,;\,x]$ avec $x \geq a$.

(2) On effectue une intégration par parties ou un changement de variable classique sur l'intégrale définie

$$\int_a^x f(t)\mathrm{t}.$$

(3) On passe à la limite quand $x$ vers $+\infty$.

⚠ On ne fera donc **jamais** d'IPP directement sur un intervalle du type $[a; +\infty[$ ou $]-\infty; +\infty[$.

**Exercice 6.** Justifier la convergence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\mathrm{d}t.$

**Exercice 7.** À l'aide du changement de variable $u = \sqrt{1-t}$, justifier la convergence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\mathrm{d}t.$

### 2.2 Utilisation de la parité

**Proposition 2.** Soit $f$ une fonction continue sur $]-a;a[$ (avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$).

(1) Si la fonction $f$ est **paire**, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t$ converge, et dans ce cas
$$\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t.$$

(2) Si la fonction $f$ est **impaire**, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\displaystyle\int_{0}^{a} f(t)\mathrm{d}t$ converge, et dans ce cas
$$\int_{-a}^{a} f(t)\mathrm{d}t = 0.$$

**Exercice 8.** Soit $f$ la fonction sur $\mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{2t}{e^t + e^{-t}}$.

(1) Montrer que $f$ est impaire.

(2) Montrer que $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} te^{-t}\mathrm{d}t$ converge.

(3) Déduire des questions précédentes que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 0$.

## 3 Critères de convergence

### 3.1 Intégrales de Riemann

Les intégrales de Riemann sont des intégrales de référence que l'on peut utiliser comme du cours.

**Théorème 1** (Convergence des intégrales de Riemann)**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors,*

*(1) Intégrale de Riemann impropre en $+\infty$:*
$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha > 1.$$

*(2) Intégrale de Riemann impropre en $0$:*
$$\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge } \iff \alpha < 1.$$

⚠ **Attention!** La convergence des intégrales de Riemann dépend de l'intervalle d'intégration. On fera donc bien attention à ne pas confondre les deux critères!

☞ En particulier, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ **diverge** pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

### 3.2 Critère de comparaison par inégalité (pour des fonctions positives)

Dans les trois prochains résultats on considère une fonction $f$ continue sur $[a;b[$ (avec $b \in \overline{\mathbb{R}}$). Naturellement, ces résultats s'adaptent à des fonctions continues et positives sur $]a;b]$ (avec $a \in \overline{\mathbb{R}}$).

**Théorème 2.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues et **positives** sur $[a;b[$ (avec $b \in \overline{\mathbb{R}}$) telles que*
$$\forall t \in [a;b[, \qquad 0 \leq f(t) \leq g(t).$$
*Alors,*

(1) $$\int_{a}^{b} g(t)\mathrm{d}t \text{ converge } \Longrightarrow \int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t \text{ converge;}$$

(2) $$\int_{a}^{b} f(t)\mathrm{d}t \text{ diverge } \Longrightarrow \int_{a}^{b} g(t)\mathrm{d}t \text{ diverge.}$$

**Exercice 9.** Déterminer la nature des intégrales

$$(i)\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1}\mathrm{d}t, \quad (ii)\ \int_0^1 \frac{e^{-t}}{t^2}\mathrm{d}t.$$

### 3.3 Critère de comparaison par négligeabilité (pour des fonctions positives)

**Théorème 3.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues et **positives** sur $[a;b[$ telles que*

$$f(t) \underset{b}{=} o(g(t)).$$

*(1) Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.*

*(2) Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ diverge.*

**Exercice 10.** Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} t^2e^{-t^2}$ puis en déduire la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

### 3.4 Critère de comparaison par équivalence (pour des fonctions positives)

**Théorème 4.** *Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues et **positives** sur $[a;b[$ telles que*

$$f(t) \underset{b}{\sim} g(t).$$

*Alors, les intégrales $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$ et $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ ont la même nature.*

**Exercice 11.** Déterminer, en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$, la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-\sqrt{t}}{(1+t)^\alpha}\mathrm{d}t$.

### 3.5 Fonctions de signe quelconque

**Définition 5.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $f$ une fonction continue sur l'intervalle $[a;b[$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ est convergente.*

**Théorème 5.** *Si l'intégrale de $f$ sur $[a;+\infty[$ converge absolument, alors elle est convergente*

$$\int_a^{+\infty} |f(t)|\mathrm{d}t \text{ converge } \Longrightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ converge.}$$

⚠ **La réciproque est fausse!** (L'intégrale peut être convergente sans être absolument convergente.)

## 4 Autres exercices

**Exercice 701.** Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes ainsi que leur valeur en cas de convergence.

$$(i)\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}, \quad (ii)\ \int_1^{+\infty} \frac{t\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}, \quad (iii)\ \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x,$$

$$(iv)\ \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2}\mathrm{d}x, \quad (v)\ \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{3^t}, \quad (vi)\ \int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x.$$

**Exercice 702.** Déterminer la nature des intégrales suivantes

$$(i)\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3+3t^2+1}}, \quad (ii)\ \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x, \quad (iii)\ \int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^3\ln(t)},$$

$$(iv)\ \int_0^{+\infty} u^k e^{-u^2}\mathrm{d}u \quad (k \in \mathbb{N}), \quad (v)\ \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{t(t-1)}, \quad (vi)\ \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

**Exercice 703.** Soit $f$ une fonction continue sur $[1;+\infty[$. Montrer que
$$\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t \text{ converge } \Longrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t \text{ converge .}$$

**Exercice 704.** Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t}\mathrm{d}t$.

(1) Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
(2) Soient $x, y$ deux réels strictement positifs tels que $x < y$. Comparer $f(x)$ et $f(y)$ puis en déduire les variations de $f$.
(3) On **admet** que $f$ est continue sur son ensemble de définition.
  (a) Déterminer $f(x) + f(x+1)$, pour $x > 0$.
  (b) En déduire la limite de $f$ en 0 et en $+\infty$.

**Exercice 705.** (D'après **EML 2017**) On considère la fonction $f : ]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = e^x - e\ln(x).$$

(1) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$ converge et la calculer.
(2) L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge-t-elle?
(3) (a) Montrer que, pour tout $x \in [2;+\infty[$, $2\ln(x) \leq \dfrac{e^x}{3}$.
  (b) Montrer alors la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$.

**Exercice 706.** (D'après **EDHEC 2004**) Le but de cet exercice est de calculer
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t.$$

Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$ et on a, en particulier, $u_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+t}dt$.

(1) Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, justifier lexistence de $u_n$.

(2) Calculer $u_0$ et $u_1$.

(3) (a) Montrer que la suite $(u_n)$ est croissante.
  (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ln(2)$.
  (c) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.

(4) (a) Pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, écrire $\ln(2) - u_n$ sous la forme dune intégrale.
  (b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(2) - u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
  (c) Donner la limite de la suite $(u_n)$.

(5) Pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 2, on pose $v_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t$.
  (a) Justifier la convergence de l'intégrale définissant $v_n$.
  (b) Montrer que : $\forall n \geq 2,\ 0 \leq v_n \leq \dfrac{1}{n-1}$.
  (c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$, puis donner la valeur de
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\mathrm{d}t.$$

**Exercice 707.** On pose, pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$J_0(x) = 1 - e^{-x}, \quad \text{et} \quad \frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}\mathrm{d}t.$$

(1) Calculer, pour tout réel $x > 0$, $J_1(x)$.
(2) Établir, pour tout réel $x > 0$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, une expression de $J_n(x)$ sous forme de somme.
(3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur.
(4) On note $I_n = \displaystyle\int_0^1 e^{n(x+\ln(1-x))}\mathrm{d}x$.
À l'aide du changement de variable $t = n(1-x)$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$I_n = n!\frac{e^n}{n^{n+1}}J_n(n).$$

**Exercice 708.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la suite d'intégrales
$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)}.$$

(1) Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $I_n$ est une intégrale convergente.
(2) (a) Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$,
$$\frac{1}{x(x-1)} = \frac{a}{x} - \frac{b}{x-1}.$$
(b) En déduire la valeur de $I_1$.
(3) (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}.$$
(b) En déduire la limite de la suite $(I_n)$.
(4) (a) Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n + I_{n+1}$.
(b) Montrer que $(I_n)$ est décroissante.
(c) Donner alors un équivalent, en $+\infty$, de $I_n$ puis donner la nature de la série $\sum I_n$.
(5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^n(x+1)^2}$.
(a) Montrer que $J_n$ est une intégrale convergente.
(b) Calculer $J_0$.
(6) (a) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer $J_k + J_{k-1}$ en fonction de $I_k$.
(b) Déterminer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'expression de
$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}I_k$$
en fonction de $J_n$.
(c) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$,
$$0 \leq J_n \leq \frac{1}{4(n-1)}$$
et en déduire la limite de $J_n$.
(d) En déduire que la série de terme général $(-1)^{n-1}I_n$ est convergente et calculer sa somme.

(7) Compléter les commandes `SciLab` ci-dessous afin qu'elles calculent et affichent les valeurs de $I_n$ et $J_n$ pour un entier $n \geq 2$ entré par l'utilisateur.

```
n=input('n=?');
I=log(2); J=1/2;
J=..................
for k=2:n
    I=..............
    J=..............
end
disp(I, 'I_n=')
disp(J, 'J_n=')
```

**Exercice 709.** (Extrait de **HEC 2018**) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(1) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ est convergente si seulement si $x > 0$.

(2) Pour tout réel $\varepsilon$ tel que $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$, établir à l'aide d'un changement de variable affine, l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} t^{y-1}(1-t)^{x-1}\mathrm{d}t$$

(3) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.

Dans toute la suite de l'exercice, on pose

$$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2, \quad B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\mathrm{d}t.$$

(4) Soit $x$ et $y$ des réels strictement positifs.

(a) À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation :

$$B(x+1, y) = \frac{x}{y} \times B(x, y+1).$$

(b) En déduire l'égalité

$$B(x, y+1) = \frac{y}{x+y} \times B(x, y).$$

(5) Pour tout réel $z$, soit $((z)^{[m]})_{m\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $(z)^{[0]} = 1$ et

$$\forall m \in \mathbb{N},\ (z)^{[m+1]} = (z+m) \times (z)^{[m]}.$$

Par exemple, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $(1)^{[m]} = m!$.
Établir pour tout $(x, y) \in \left(\mathbb{R}^{+*}\right)^2$ et pour tout couple $(k, \ell)$ d'entiers tels que $0 \leq k \leq \ell$, la relation :

$$B(x+k, y+\ell-k) = \frac{(x)^{[k]} \times (y)^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x, y).$$