Retour sur le programme (2). Petits exercices de synthèse qui font plaisir.

Les exercices suivants ont des origines diverses et ont été choisis car ils permettent un aperçu non exhaustif des notions du programme. S'ils sont naturellement intéressants et que tous et toutes devraient arriver à les faire, il serait naïf de croire que leur maîtrise suffit à la réussite aux écrits.

Exercice 1

☞ Couples de v.a.d, Simulation sous `SciLab`.

Un binôme de deux personnes nommées A et B participent à une épreuve physique. Ces deux personnes doivent grimper une corde. Une fois que l'une des deux personnes a réussi, elle doit attendre que l'autre personne en fasse de même. On considère que

- A et B disposent chacun de leur propre corde.
- A et B ont droit à autant d'essais qu'ils le souhaitent.
- Les essais sont indépendants.
- Chaque essai, qu'il soit réussi ou non, dure une minute et est réussi avec probabilité p.

On note X_1 (resp. X_2) le nombre d'essais nécessaires à A (resp. B) pour grimper la corde, et Y la variable aléatoire réelle égale à $|X_1 - X_2|$.

(1) Quelle est la loi de X_1? De X_2? Donner leur espérance et leur variance.
(2) Que représente l'événement $[Y = 0]$? Déterminer sa probabilité.
(3) Montrer que pour tout on a, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(Y = k) = \frac{2p(1-p)^k}{2-p}.$$

(4) Écrire un programme `SciLab` permettant de simuler la variable aléatoire Y.
(5) Pour quelles valeurs de p les deux personnes s'attendront-elles en moyenne moins de 5 minutes ?

Exercice 2

☞ Suites récurrentes, séries, IAF, `SciLab`.

(1) Soit f la fonction, dont la courbe dans un repère orthonormé est notée $\mathcal{C}$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{e}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)\right).$$

(a) Dresser le tableau de variations de f.

(b) Montrer que la courbe Γ d'équation $y = \ln\left(\frac{e}{2}x\right)$ est asymptote à $\mathcal{C}$ et tracer les deux courbes sur un même graphique.

(c) Établir, pour tout réel $x \geq 1$, l'encadrement $0 \leq f'(x) < 1$. En déduire, pour $x \geq 1$, le signe de $f(x) - x$ et les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

(2) On considère le programme `SciLab` suivant

```
function y=f(x)
    y=log(%e*(x+x^(-1))/2)
endfunction

x=[0.01:0.1:5]; plot2d(x, f(x))

x=[0,5]; plot2d(x,x)

u=input("u0=?")
x=[u]; y=[0];
for k=1:10
    z=f(u);
    x=[x,u];  x=[x,z];
    y=[y,z,z]; u=z;
end
plot2d(x,y)
```

Expliquer ce que fait ce programme et ce qu'il illustre.

(3) Étudier la suite définie par $u_0 \in [1; +\infty[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

(4) (a) Justifier l'existence d'un réel $a > 1$ tel que $x \in [1; a] \Longrightarrow f'(x) \leq \frac{1}{2}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_n - 1$. Quelle est la nature de la série de terme général v_n?

Mini Problème 1

☞ Variables discrètes, sommes doubles, Inégalité de Bienaymé-Tchebychev, `SciLab`.

On lance une pièce équilibrée (la probabilité d'obtenir *Pile* et celle d'obtenir *Face* étant donc toutes les deux égales à $\frac{1}{2}$) et on note Z la variable aléatoire égale au rang du lancer où l'on obtient le premier *Pile*.

Après cette série de lancers, si Z a pris la valeur k ($k \in \mathbb{N}^*$), on remplit une urne de k boules numérotées $1, 2, ..., k$, puis on extrait au hasard une boule de cette urne.

On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée après la procédure décrite ci-dessus.

(1) On décide de coder l'événement « obtenir un *Pile* » par 1 et l'événement « obtenir un *Face* » par 0.
On rappelle que la fonction `rand()` renvoie un réel aléatoire de $[0, 1[$ et `floor(x)` renvoie la partie entière de x.

(a) Compléter le programme suivant pour qu'il affiche la valeur prise par Z lors de la première partie de l'expérience décrite ci-dessus.

```
z  = 1
hasard= floor(.......*rand())
while hasard......
        z = ??..
        hasard = floor(....*rand( ))
end
disp(z)
```

(b) Quelle instruction faut il rajouter à ce programme pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans ce problème et affiche la valeur prise par la variable aléatoire X ?

(2) Établir la convergence de la série de terme général $\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

(3) Rappeler la loi de Z ainsi que son espérance et sa variance.

(4) (a) Pour tout couple (i, k) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité $P_{[Z=k]}(X = i)$.

(b) En déduire que :

$$\forall i \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X = i) = \sum_{k=i}^{+\infty} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

(c) On **admet**, dans cette question, que les sommes peuvent s'intervertir :

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{k=i}^{+\infty} ... = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{k} ....$$

Vérifier que

$$\sum_{i=1}^{+\infty} P(X = i) = 1.$$

(5) Montrer que, pour tout entier naturel i non nul, on a

$$iP(X = i) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{i-1}.$$

(6) En déduire que X possède une espérance.

(7) Montrer, en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question **4c)**, que $E(X) = \dfrac{3}{2}$.

(8) Montrer que X a un moment d'ordre 2.

(9) Établir alors, toujours en admettant qu'il est licite de permuter les symboles $\sum$ comme dans la question **4c)**, que

$$E(X^2) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)(2k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

(10) Déterminer les réels a, b et c tels que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $(k+1)(2k+1) = ak(k-1) + bk + c$.

(11) En déduire la valeur de $E(X^2)$ et vérifier que $V(X) = \frac{11}{12}$.

(12) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Chebychev, pour la variable X.

(13) En déduire que $P(X > 3) < \frac{11}{27}$.

(14) On se propose dans cette question de calculer $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X \geq 3)$.

(a) Écrire explicitement en fonction de x et n la somme $\sum_{k=1}^{n} x^{k-1}$ (n désignant un entier naturel non nul et x un réel différent de 1).

(b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \ln(2) - \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x.$$

(c) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad 0 \leq \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^k.$$

En déduire la valeur de

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{1/2} \frac{x^n}{1-x}\mathrm{d}x.$$

(d) Établir alors que $P(X = 1) = \ln(2)$ puis donner la valeur de $P(X = 2)$.

(e) Utiliser les résultats précédents pour calculer $P(X \geq 3)$, puis donner une valeur approchée de $P(X \geq 3)$ en prenant $\ln(2) \simeq 0,7$.

Que peut-on en déduire en ce qui concerne le majorant trouvé à la treizième question?

Mini-Problème 2

☞ Réduction.

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Étant données deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{R})$, le but de l'exercice est de comparer le spectre des matrices AB et BA et d'étudier leur diagonalisabilité.

Partie I - Étude de deux exemples.

Dans cette partie, on considère les matrices de $M_3(\mathbb{R})$ suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) (a) Les matrices A et B sont-elles inversibles ?
  (b) Calculer AB et BA.
  (c) Justifier sans aucun calcul que les matrices AB et BA sont diagonalisables.
  (d) Déterminer le spectre de la matrice BA à l'aide du pivot de gauss.
  (e) Vérifier que les matrices AB et BA ont même spectre.

(2) (a) Les matrices C et D sont-elles inversibles ?
  (b) Calculer CD et DC.
  (c) Montrer que le polynôme $P(X) = X^3 - X^2$ est un polynôme annulateur de DC.
  (d) En déduire le spectre de la matrice DC.
  (e) Vérifier que les matrices CD et DC ont même spectre.
  (f) Les matrices CD et DC sont-elles diagonalisables ?

Partie II - Cas général lorsque A et B sont inversibles.

Dans cette partie, on revient au cas général et on considère deux matrices A et B **inversibles** de $M_n(\mathbb{R})$.

(1) Soit λ une valeur propre de la matrice AB et X un vecteur propre associé.
  (a) Montrer que la matrice AB est inversible puis en déduire, en le justifiant, que $\lambda \neq 0$.
  (b) Montrer que le vecteur BX est non nul.
  (c) Montrer que le vecteur BX est un vecteur propre de la matrice BA associé à la valeur propre λ.

(2) En déduire que $\mathrm{Sp}(AB) \subset \mathrm{Sp}(BA)$ puis conclure, sans aucun calcul supplémentaire, que les matrices AB et BA ont même spectre.

(3) *On rappelle que les matrices A et B sont inversibles.*
On va montrer dans cette question que si AB est diagonalisable alors BA est diagonalisable.
On suppose donc que AB est diagonalisable et on note $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une base de vecteurs propres de AB.
  (a) Montrer que la famille $(BX_1, BX_2, \ldots, BX_n)$ est libre.
  (b) En déduire, en utilisant la question 1c) de cette partie, que BA est diagonalisable.

(4) Justifier, sans aucun calcul supplémentaire, que si BA est diagonalisable alors AB est diagonalisable.

(5) On a montré dans cette partie, que lorsque les matrices A et B sont inversibles, alors $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$ et de plus, AB est diagonalisable si et seulement si BA est diagonalisable.
Ce résultat est-il toujours valable lorsque les matrices A et B ne sont pas inversibles ?

Exercice 3

☞ Fonction définie par une intégrale, Convexité. Variables à densité.

(1) On considère la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \int_0^x e^{t^2} \mathrm{d}t.$$

(a) Prouver que G est une fonction impaire.
(b) Déterminer le signe de G sur $\mathbb{R}$.
(c) Montrer que

$$\forall\, x \in [0, +\infty[, \quad G(x) \geq \frac{x^3}{3}.$$

(d) En déduire la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de $G(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$?
(e) Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner, pour tout réel x, une expression de sa dérivée $G'(x)$.
(f) Construire le tableau de variations de G sur $\mathbb{R}$ en y faisant figurer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ ainsi que la valeur en 0.
(g) Étudier la convexité de G.
(h) Donner l'allure de la courbe représentative de G en précisant la tangente en 0.

(2) On pose $K = G(1)$ et on considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2K}\, G(x), & \text{si } x \in [0,1] \\ 1, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

(a) Prouver que la fonction F peut être considérée comme la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité.
Pour la suite de l'exercice, on note X une variable aléatoire admettant F pour fonction de répartition.
(b) Déterminer une densité f de X.
(c) Justifier que X admet une espérance et donner une expression de $E(X)$ en fonction de K.
(d) Justifier que X admet un moment d'ordre 2 et donner une expression de $E(X^2)$ en fonction de K.

(3) On pose $Y = \dfrac{1}{\sqrt{X}}$.
(a) Justifier que la variable aléatoire Y est presque sûrement bien définie et déterminer l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y.
(b) On note F_Y la fonction de répartition de Y.
Vérifier que :

$$\forall\, x \in [1, +\infty[, \quad F_Y(x) = 1 - \frac{1}{2x^4} - \frac{1}{2K}\, G\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Que vaut $F_Y(x)$ lorsque x appartient à $]-\infty, 1[$?
(c) Prouver que Y est une variable aléatoire à densité.
(d) Déterminer une densité h de Y.
(e) Montrer que Y admet une espérance.
On ne cherchera pas à calculer $E(Y)$.

Mini-Problème 3

☞ Algèbre Linéaire. Fonctions de 2 variables. `SciLab`

Partie I

On considère la matrice carrée réelle d'ordre 3

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

et on note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice est A, dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

(1) Déterminer le noyau et l'image de φ. En déduire que 0 est valeur propre de φ.

(2) (a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.
(b) Vérifier que 4 et 6 sont deux valeurs propres de φ et déterminer les sous espaces propres associés.
(c) On introduit les vecteurs

$$u_1 = -e_1 + e_2 + 2e_3, \quad u_2 = e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad u_3 = e_1 - e_2 + e_3.$$

Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer la matrice A' de φ dans cette base.

(3) Soient α, β et γ trois nombres réels non nuls et P la matrice définie par : $P = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & \gamma \\ \alpha & \beta & -\gamma \\ 2\alpha & 0 & \gamma \end{pmatrix}$.
(a) Montrer en utilisant la question précédente que P est inversible.
(b) On rapelle que pour toute matrice $A = (a_{i,j})$, on appelle transposée de A, la matrice notée ${}^tA$ défnie par ${}^tA = (a_{j,i})$, c'est à dire obtenue en permutant les lignes et les colonnes de A. Calculer le produit $P \cdot {}^tP$ et en déduire l'existence de valeurs de α, β et γ telles que ${}^tP = P^{-1}$. On se placera dans cette situation dans la suite de l'exercice.
(c) Justifier que $A = P \cdot A' \cdot {}^t P$.

Partie II

Soient x, y et z trois réels, on définit les matrices colonnes et lignes respectives

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad {}^tX = (x, y, z)$$

et on pose

$$g(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 + 4xz - 4yz + 2z^2.$$

(4) (a) Montrer que : ${}^tX \cdot A \cdot X = g(x, y, z)$
(b) Montrer que la transposée de la matrice $({}^tP \cdot X)$ est $({}^tX \cdot P)$.
(c) En déduire que

$$g(x, y, z) = 4y'^2 + 6z'^2, \quad \text{où on a posé} \quad {}^tP.X = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

(5) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = g(x,y,y^2), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Expliciter $f(x,y)$ et justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
(b) Déterminer les points critiques de f.
(c) Former la matrice hessienne en chacun des points critiques précédents. Que peut-on conclure quant à la nature de ces points critiques?
(d) Montrer en utilisant la question **(4)(c)** que $(0,0)$ est un minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.
(e) Compléter le programme `SciLab` permettant d'obtenir la représentation graphique de f sur $[-4;4]^2$, que l'on pourra contempler avec admiration.

```
function z=f(x,y)
    z=...................
endfunction

x=...................
y=...................
z=feval(x,y, f)

plot3d(................)
```