ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Quinzaine de colle n°1

Période du 10/09 au 21/09

Semaine du 10/09 au 21/09

Programme

- Révisions
- Exercices **non traités** de la feuille de révisions de rentrée
- Reprise du DS n°0 (possibilité de retravailler sur les exercices **mal ou non** traités lors du DS)

Planche d'exercices

(1) (*) Justifier la convergence et calculer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n(n-1)}{6^n}$.

(2) (*) Soit A une matrice carrée vérifiant l'équation $A^2 - 4A + 3I = 0$. Montrer que A est inversible et exprimer l'inverse de A en fonction de A.

(3) (*) Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} 5x + 2y - z &= 0 \\ 2x + 2y + 2z &= 0 \\ -x + 2y + 5z &= 0 \end{cases}$$

(4) (**) On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\begin{cases} u_0 &= 2 \\ v_0 &= -1 \end{cases} \qquad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n - v_n \\ v_{n+1} &= u_n + 4v_n \end{cases}$$

(a) On considère la suite (p_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $p_n = u_n + v_n$. Montrer que (p_n) est géométrique. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

(b) À l'aide de la question précédente, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = 3v_n + 3^n.$$

(c) Montrer que la suite (z_n), définie pour tout n par $z_n = \dfrac{v_n}{3^n}$, est arithmétique. En déduire l'expression de son terme général.

(d) Donner enfin l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

(5) (**) On considère la matrice $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer H^2 puis, à l'aide de la formule du binôme, calculer $(I + aH)^n$ (où $a \in \mathbb{R}$).

(6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x)\mathrm{d}x.$$

(a) (*) Justifier que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(b) (**) À l'aide d'une intégration par parties, calculer I_0.
(c) (*) Montrer que, pour tout $x \in [0;1]$, $\ln(1+x) \leq x$.
(d) (**) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

puis conclure quant à la convergence de la suite (I_n).

(7) (*) Montrer que la fonction f définie ci-après est une densité de probabilité, avec

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

(8) (**) On considère une urne contenant 1 boule numérotée 1, 2 boules numérotées 2, ..., n boules numérotées n. On tire au hasard une boule dans l'urne et on note X le numéro de la boule obtenue. Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$.

(9) (***) On considère la série de terme général $u_k = \dfrac{1}{k+2^k}$.

(a) Justifier que cette série converge. On note S sa somme : $\quad S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{k+2^k}$.
(b) On souhaite déterminer une valeur approchée de S.
  (i) Montrer que :

$$\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2^k} - S \right| \leq \frac{1}{2^n}.$$

  (ii) Écrire une fonction `SciLab`, d'entête `y=S_approx(eps)` prenant en paramètre un réel `eps` et renvoyant une valeur approchée de S à `eps` près.

(10) (***)

(a) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $\quad x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.
(b) Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

(11) (***) Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher. On effectue n tirages avec remise de la boule dans l'urne. et on note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{ieme} \text{ tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

(a) Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.
(b) Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$.
(c) Vérifier que : $\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = 1$.
(d) Pour $x \neq 1$ et n entier naturel non nul, montrer que :

$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$

(e) En déduire $E(Y)$.

Semaine du 17/09 au 21/09

Programme

- Exercice de la semaine précédente
- Reprise du DS n°0 (possibilité de retravailler sur les exercices **mal ou non** traités lors du DS)
- **Chapitre 1:** fonctions négligeables, fonctions équivalentes, DL d'ordre 2. (Sections 1 à 3)

Planche d'exercices

(1) (*) Complétez les équivalents suivants :

$$(i)\ 1-e^{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \dots \qquad (ii)\ \ln(1+e^{-x}) \underset{x\to +\infty}{\sim} \dots \qquad (iii)\ 1-(1-e^{-x})^n \underset{x\to +\infty}{\sim} \dots$$

$$(iv)\ \frac{x\ln(x)}{x-1} \underset{x\to 1}{\sim} \dots \qquad (v)\ \frac{1}{x^2-1} \underset{x\to 1}{\sim} \dots \qquad (vi)\ \frac{1}{x^2-1} \underset{x\to -1}{\sim} \dots$$

(2) (*) Déterminer un DL à l'ordre 2 au point indiqué

$$(i)\ e^{x^2+x} \text{ en } 0; \qquad (ii)\ \ln(1+e^x) \text{ en } 0; \qquad (iii)\ (x+1)\sqrt{x+1}-1 \text{ en } 0;$$

$$(iv)\ e^{\sqrt{x}} \text{ en } 1; \qquad (v)\ (\ln(1+x))^2 \text{ en } 0; \qquad (vi)\ x^2-2x-1 \text{ en } 1.$$

(3) (*) Déterminer un DL d'ordre 2 et en déduire la position relative de la courbe et de la tangente au point considéré

$$(i)\ x \mapsto \frac{e^x+2}{\sqrt{1+x}} \text{ en } 0; \qquad (ii)\ x \mapsto (x+1)^{1/3}-(1-x)^{1/3} \text{ en } 0; \qquad (iii)\ x \mapsto x^2+x+1 \text{ en } 1.$$

(4) (*) Comparer

$$(i)\ \sqrt{1+x} \text{ et } \ln(x) \text{ en } +\infty; \qquad (ii)\ x \text{ et } \sqrt{x} \text{ en } 0; \qquad (iii) :\ \frac{1}{x^2} \text{ et } \frac{1}{x\sqrt{x}} \text{ en } 0$$

$$(iv)\ e^{1/x} \text{ et } \ln(x) \text{ en } 0^+; \qquad (v)\ \ln(-x) \text{ et } e^{-x^2} \text{ en } -\infty;$$

$$(vi)\ e^x-1 \text{ et } \frac{1}{2}\left(\sqrt{x+1}-1\right) \text{ en } 0; \qquad (vii)\ e^{2x}-e^x \text{ et } x(x+1) \text{ en } -1.$$

$$(viii)\ \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \text{ et } ex \text{ en } +\infty.$$

(5) (*) Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+$, où

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{x^2}}{\ln(1+x)} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$$

(6) (***) Obtenir un *développement asymptotique*[1] des expressions suivantes

$$(i)\ \sqrt{\frac{x-1}{x}}, \qquad (ii)\ \ln\left(1+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln(x).$$

[1] La notion sera précisée aux étudiants attanquant cette question lors de la séance

(7) (**)

(a) Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$, à valeurs réelles, telle que :
$$N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x).$$

(i) Montrer que la fonction N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1[$.

(ii) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $\ln(1-x) \leq -x$.

(iii) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $N'(x) \leq 0$.

(iv) En déduire le signe de N sur l'intervalle $[0,1[$.

(b) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$ par : $f(x) = \begin{cases} -2\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(i) Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$.

(ii) En déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$.

(iii) En déduire que la fonction f est continue sur $[0,1[$.

(iv) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et que pour tout $x \in]0,1[$, on a :
$$f'(x) = -2\frac{N(x)}{x^3(1-x)}.$$

☞ On **admet** qu'au voisinage de 0, on a : $\ln(1-x) + x + \dfrac{x^2}{2} \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{x^3}{3}$.

(v) Montrer alors que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \dfrac{2}{3}$.

(vi) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,1[$, limites comprises.

(vii) Tracer soigneusement l'allure de la courbe représentative de la fonction f. On donnera l'équation de la tangente en 0 et on la tracera.

(viii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution, notée u_n sur $[0,1[$. Donner la valeur de u_1.

(ix) L'équation $f(x) = x$ admet-elle une solution sur $[0,1[$?

(x) (***) Démontrer l'équivalence admise ci-dessus.