ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Quinzaine de colle n°2

Période du 24/09 au 05/10

Semaine du 24/09 au 28/09

Programme

- **Chapitre 1.** Intégralité du chapitre. On s'entraînera longuement sur le calcul de DL à l'ordre 2 et la recherche d'équivalents.
  ☞ Exercices semaine précédente.
- **Chapitre 2.** Savoir vérifier si un vecteur est combinaison linéaire de vecteurs donnés. Montrer qu'un ensemble donné est un espace vectoriel en l'identifiant à un sous-espace d'un espace usuel (en vérifiant la stabilité par combinaison linéaire).

Planche d'exercices

(1) (*) Comparer, dans chaque cas, les suites (u_n) et (v_n):

$$\begin{array}{rl}
(i) & u_n = e^{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = e^{n-1} \\
(ii) & u_n = \ln(n)e^n \quad \text{et} \quad v_n = e^n n^{n/2} \\
(iii) & u_n = \dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{3^n} \quad \text{et} \quad v_n = \dfrac{1}{e^n} + \dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{\ln(n)} \\
(iv) & u_n = \dfrac{1}{1 - \sqrt{\frac{1}{n}}} \quad \text{et} \quad v_n = \sqrt{n} \\
(v) & u_n = \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad v_n = \dfrac{2}{n^2}
\end{array}$$

(2) (*) À l'aide d'un équivalent, donner la limite des suites suivantes

$$(i)\ \frac{n^2+n+1}{2n+3+\frac{1}{n}}; \qquad (ii)\ n^2\left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\right); \qquad (iii)\ \left(1+\frac{3}{n^2}\right)^n$$

$$(iv)\ \ln(n)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right); \qquad (v)\ \frac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1}{\ln(n+1)-\ln(n)}$$

(3) (**) Déterminer un équivalent d'une suite (u_n) vérifiant l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2 \leq \frac{u_n}{n+5} \leq 2 + \frac{1}{n^2}$$

(4) (**) Déterminer un équivalent d'une suite (u_n) telle que $(n-1)u_n + e^n$ converge vers 2.

(5) (**) Déterminer un équivalent d'une suite (u_n) vérifiant

$$1-\frac{u_n^2}{2}+o(u_n^2)=\frac{n-1}{n}.$$

(6) (*) À l'aide d'un DL judicieusement choisi, montrer que

$$(i)\ \sqrt{1+n^2}\sim n+\frac{1}{2n};\qquad (ii)\ \sqrt{n+2}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\sim\frac{1}{2\sqrt{n}};$$

$$(iii)\ n^{1/n}=1+\frac{\ln(n)}{n}+\frac{\ln(n)^2}{2n^2}+o\left(\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^2\right);$$

$$(iv)\ \ln\left(1+n\left(e^{1/n^2}-1\right)\right)=\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(7) (***) Soit (u_n) une suite réelle qui converge vers un réel $\ell\neq 0$. Montrer que $u_{n+1}\sim u_n$. Est-ce toujours vrai si $\ell=0$?

(8) (***) Soit $\alpha>0$. Le but de l'exercice est de trouver un équivalent de u_n, où

$$u_n=\sum_{k=0}^{n}k^\alpha.$$

(a) Quelle est la nature de la suite (u_n)?
(b) À l'aide de l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout $n\geq 1$,

$$n^{\alpha+1}-(n-1)^{\alpha+1}\leq(\alpha+1)n^\alpha\leq(n+1)^{\alpha+1}-n^{\alpha+1}.$$

(c) En déduire que

$$n^{\alpha+1}\leq(\alpha+1)u_n\leq(n+1)^{\alpha+1}-1.$$

(d) Conclure.

(9) (*) L'ensemble $F=\{u\in\mathbb{R}^3:\ u=(y+z,-z,0),\ (y,z)\in\mathbb{R}^2\}$ est-il un espace vectoriel ?
(10) (*) Le vecteur $(3,3)\in\mathbb{R}^2$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(1,1)$ et$(1,2)$?
(11) (*) Le vecteur $\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1&-1\\1&1\end{pmatrix}$?

Semaine du 01/10 au 05/10

Programme

- Reprise éventuelle d'exercices non ou mal traités du DS 1.
- **Chapitre 2.**

Planche d'exercices

(1) (*) Montrer **de deux façons** que les ensembles ci-dessous sont des espaces vectoriels et en exhiber une famille génératrice

$$(i) \qquad F = \left\{ M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : \ M = \begin{pmatrix} 0 & a & a+b \\ -a & 0 & b \\ b+c & c & 0 \end{pmatrix}, \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

$$(ii) \qquad G = \left\{ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : \ \left\{ \begin{array}{rcl} x-y-t & = & 0 \\ x+y & = & 0 \\ z-2t & = & 0 \end{array} \right. \right\}$$

$$(iii) \qquad H = \left\{ (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \right\}.$$

$$(iv) \qquad J = \left\{ P \in \mathbb{R}_3[X] : \ X^2P' - 2P = 0 \right\}$$

(2) (*) Déterminer si les familles suivantes, dans les espaces considérés, sont libres, si elles sont génératrices et si elles forment des bases de l'espace.

$$(i) \qquad \left(X+1, X^2+1, X^3+1\right) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_3[X]$$

$$(ii) \qquad ((3,2,1),(1,2,2),(0,1,1)) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3$$

$$(iii) \qquad \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{dans} \quad \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

$$(iv) \qquad (X, X^2, 2X) \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}_2[X]$$

$$(v) \qquad \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{dans} \quad \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

(3) (**) Si A est une matrice fixée de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, on appelle commutant de A, le sous-ensemble suivant, noté $C(A)$:

$$C(A) = \{M \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) : \ AM - MA = 0\}$$

(a) Montrer que $C(A)$ est un espace vectoriel.

(b) Dans cette question, $p = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer une base de $C(A)$ ainsi que sa dimension.

(4) (**) On se place dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que la famille (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$, où

$$u = (-1,2,0), \quad v = (3,-5,-1), \quad w = (0,1,-2).$$

Expliciter les coordonnées d'un vecteur (x,y,z) dans cette nouvelle base.

(5) (**) Déterminer les réels a pour lesquels la famille $((2a, a-1),(a-3, a+1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

(6) (**) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $F_a = \{P \in \mathbb{R}_n[X] : \ P(a) = 0\}$. Démontrer que $\mathcal{B} = \left((X-a)X^k\right)_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de F_a. Quelle est la dimension de F_a? Donner les coordonnées de $(X-a)^n$ dans cette base.

(7) (***) Soit $(v_1, v_2, ..., v_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel E. Pour $k \in [\![1; n-1]\!]$, on pose $w_k = v_k + v_{k+1}$ et $w_n = v_n + 1$. Montrer que la famille $(w_1, w_2, ..., w_n)$ est libre si et seulement si n est impair.

(8) (**D'après **EDHEC 2009**) On considère l'ensemble E des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, que l'on admet être un espace vectoriel et on introduite

$$F = \{u \in E : \ u'' - 5u' = 0\}.$$

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
(b) Soit $u \in F$. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = u'(x)e^{-5x}$ est constante.
(c) En déduire que $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$, où u_1 est la fonction constante égale à 1 et $u_2(x) = e^{5x}$.
(d) Quelle est la dimension de F?

(9) Soit E l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On introduit les deux sous-ensembles F et G composés respectivement des fonctions paires et impaires.
(a) (**) Montrer que F et G sont deux sous-espaces de E.
(b) (**) Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
(c) (***) Montrer que, pour toute fonction $\varphi \in E$, il existe $f \in F$ et $g \in G$ telles que $\varphi = f + g$..
(d) (***) Montrer que les fonctions f et g précédemment trouvées sont uniques. *On dira que E est somme directe de F et G, ce qui s'écrit $E = F \oplus G$.*

(10) (***) On rappelle que $S_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices *symétriques* de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est à dire les matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant ${}^tM = M$.
(a) Dans cette question on prend $n = 3$.
  (i) Montrer que $S_3(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
  (ii) Déterminer une base de cet espace ainsi que sa dimension.
(b) On revient au cas général.
  (i) Montrer que la famille $\mathcal{E} = (E_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$ est une famille libre d'éléments de $S_n(\mathbb{R})$.
  (ii) Montrer que la famille $\mathcal{F} = (E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$ est une famille libre d'éléments de $S_n(\mathbb{R})$.
  (iii) Montrer que la famille obtenue par *concaténation* des familles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ est encore libre et qu'elle forme une base de $S_n(\mathbb{R})$. En déduire la dimension de $S_n(\mathbb{R})$.