ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Quinzaine de colle n°3

Période du 09/10 au 19/10

Semaine du 09/10 au 12/10

Programme

- **Chapitre 3.** Intégralité.
- Reprise du DS n°1 du 01/10.

Planche d'exercices

(1) (**) Exercice 301 (**EML 2016**).

(2) (*) - **EXERCICE INCONTOURNABLE** - Soient f la fonction définie sur $[-2,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x+2}$ et (u_n) définie par $u_{n+1}=f(u_n)$ et $u_0\geq 0$.

(a) Montrer que $f([1;3])\subset[1;3]$.

(b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution dans $[1;3]$, notée α.

(c) Montrer que, pour tout $x\in[1;3]$, on a
$$|f'(x)|\leq\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

(d) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a
$$|u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2\sqrt{3}}|u_n-\alpha|.$$

(e) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$$|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^n|u_0-\alpha|.$$

(f) Conclure quant à la convergence de (u_n).

(g) Écrire un programme `SciLab` qui calcule et affiche une approximation de α à ε près, où ε est entré par l'utilisateur.

(3) (*) Montrer que l'équation $x^{3n}+n^nx^n-1=0$ admet une unique solution strictement positive, notée a_n. Montrer que $a_n<1/n$ et en déduire la limite de la suite (a_n).

(4) (*) - **EXERCICE INCONTOURNABLE** - On considère, pour $n \geq 3$, l'équation

$$(E_n) \qquad x^n + x^2 + 2x - 1 = 0.$$

(a) On introduit la fonction $f_n : x \mapsto x^2 + x^2 + 2x - 1$. Montrer que f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ dans un intervalle J à déterminer. Quelles sont les variations de f^{-1}?
(b) Montrer alors que (E_n) possède une unique solution strictement positive, que l'on notera x_n. Montrer de plus que, pour tout $n \geq 3$,

$$0 < x_n < \frac{1}{2}.$$

(c) Montrer que (x_n) est croissante.
(d) En conclure que (x_n) converge vers un réel ℓ dont on donnera un encadrement.
(e) En utilisant un encadrement de x_n, montrer que x_n^n tend vers 0, si n tend vers $+\infty$.
(f) Conclure quant à la valeur de ℓ.

(5) (**) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} \mathrm{d}t.$$

(a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$, calculer $f'(x)$.
(b) Établir pour tout réel $x \geq 1$, l'inégalité $f(x) \geq e \ln x$.
(c) En déduire $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.
(d) Établir pour tout réel x de l'intervalle $]0,1]$, l'inégalité $f(x) \leq e^x \ln x$.
(e) En déduire $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.
(f) Dresser le tableau de variation de f.
(g) On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
   (i) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion A et déterminer les coordonnées du point A.
   (ii) Écrire l'équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A.
   (iii) Tracer l'allure de la courbe $(\mathcal{C})$ en précisant la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{T})$.
(h) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un unique réel, noté u_n, vérifiant

$$\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t} \mathrm{d}t = n.$$

(i) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante.
(j) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

(6) (**/***) Soit $f : x \mapsto 1 - x^2$. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1/2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
(a) Étudier les variations de f sur $[0;+\infty[$.
(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.
(c) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que

$$u_{2n+1} \leq u_{2n-1} \leq u_{2n} \leq u_{2n+2}.$$

(d) Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont deux suites convergentes.
(e) Montrer que (u_n) diverge.

(7) (**/***D'après ORAL **HEC 2013**, SP) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = x + 1 - \frac{e^x}{n}.$$

(a) Montrer que l'équation $f_n(x)$ admet une unique solution strictement négative, notée x_n.
(b) Montrer que (x_n) est décroissante et convergente.
(c) Déterminer la limite ℓ de (x_n).
(d) On pose $y_n = x_n - \ell$. Déterminer un équivalent de y_n.

Semaine du 16/09 au 19/10

Programme

- **Chapitre 3.** Intégralité.
- **Chapitre 4.** Intégralité.

Planche d'exercices

(1) (*) Pour chacune des séries suivantes, préciser la nature et calculer la somme en cas de série convergente:

$$(i)\ \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{3\times 4^n}, \qquad (ii)\ \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}, \qquad (iii)\ \sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$(iv)\ \sum_{n\geq 0} \frac{2n(-1)^{n+1}}{7^{n-1}}, \qquad (v)\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^2-2}{n!}, \qquad (vi)\ \sum_{n\geq 1} n\ln\left(\frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right).$$

(2) (*) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}$ converge.

(3) (*) Montrer que

$$\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

et en déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

(4) (*/**) Montrer la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} w_n$, où

$$w_n = 2^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{4^k}{k!}.$$

(5) (*/**) Montrer, à l'aide d'un DL en 0, la convergence de la série de terme général $\displaystyle\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

(6) (**) Une erreur classique.

(a) Montrer que $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

(b) Montrer que

$$\frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right).$$

(c) Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}$.

(d) Expliquer le titre de l'exercice.

(7) (**) On veut déterminer l'ensemble des valeurs α pour lesquelles la série de terme général u_n converge, où

$$u_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n^\alpha}.$$

(a) Montrer que

$$\int_0^n \sqrt{x}\mathrm{d}x \leq \sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n} \leq \int_1^{n+1} \sqrt{x}\mathrm{d}x.$$

(b) En déduire un équivalent du numérateur de u_n, puis de u_n.

(c) Conclure.

(8) (**/***D'après **EDHEC 1997**) Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}},$$

où p désigne un entier naturel fixé.

(a) Montrer que si $p = 0$ ou si $p = 1$ la série de terme général u_n diverge.

☞ On suppose dans toute la suite que p est supérieur ou égal à 2 et on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

(b) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+p+2)\, u_{n+2} = (n+2)\, u_{n+1}.$$

(c) En déduire par récurrence sur n que

$$S_n = \frac{1}{p-1}\left(1 - (n+p+1)\, u_{n+1}\right)$$

(d) On pose $v_n = (n+p)u_n$. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

(e) En déduire que la suite (v_n) converge et que sa limite ℓ est positive ou nulle.

(f) Utiliser le résultat pprécédent pour montrer que la série de terme général $u_n$converge et donner sa somme en fonction de p et de ℓ.

(g) On suppose dans cette question que $\ell \neq 0$. Montrer que

$$u_n \sim \frac{\ell}{n}, \qquad n \to +\infty.$$

En déduire une contradiction.

(h) Donner la valeur de ℓ et en déduire en fonction de p, la somme de la série de terme général u_n.

(9) (**D'après **EML 1994**)

On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger chaque jour par une entreprise suit une loi de Poisson de paramètre 5. Ces colis sont expédiés indépendemment les uns des autres.

La probabilité qu'un colis expédié à l'étranger soit déterioré est égale à $0,1$.

On s'interresse aux colis expédiés à l'étranger un jour donné :

- N est la variable aléatoire égale au nombre de colis expédiés.
- X est la variable aléatoire égale au nombre de colis déteriorés.
- Y est la variable aléatoire égale au nombre de colis en bon état.

On a donc $N = X + Y$.

(a) Déterminer pour tout entier n et k la probabilité conditionnelle $P_{N=n}(X = k)$.

(b) Déterminer pour tout entier entier k la probabilité $P(X = k)$. Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre $0,5$.

(c) On admet que la loi de Y est une loi de Poisson de paramètre 4,5.

(d) Soient i et $j \in \mathbb{N}$.

 (i) Déterminer la probabilité: $P(X = i \cap Y = j)$.

 (ii) X et Y sont-elles indépendantes?