ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Quinzaine de colle n°4

Période du 05/11 au 16/11

Semaine du 05/11 au 09/11

Programme

- **Chapitre 4.** Intégralité.
- **Chapitre 5.** Tout sauf le dernier paragraphe sur le coefficient de corrélation linéaire.

Planche d'exercices

(1) (*/**) Calculer les sommes doubles suivantes

$$(i)\ \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}(i-j), \qquad (ii)\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\frac{i}{j+n}, \qquad (iii)\ \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{2^{i+j}}{i!j!}.$$

(2) (**) Soit (X,Y) un couple de v.a à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que, pour tous $(n,m)\in\mathbb{N}^2$,

$$P((X=n)\cap(Y=m))=\frac{\alpha}{(m+n+1)!}.$$

   (a) Déterminer la valeur de la constante α.
   (b) Déterminer les lois de X et Y (on fera apparaître une somme finie que l'on ne cherchera pas à calculer).
   (c) X et Y sont-elles indépendantes?
   (d) Déterminer la loi de $Z=X+Y$.

(3) (***INCONTOURNABLE**) Quelle est la probabilité que coïncident deux v.a. de même loi $\mathcal{G}(p)$ indépendantes?

(4) (**/***) Soient X,Y deux v.a. indépendantes de même loi $\mathcal{G}(p)$. Montrer que

$$\min(X,Y)\hookrightarrow\mathcal{G}(1-(1-p)^2).$$

(5) (****INCONTOURNABLE**) Soit $X\hookrightarrow\mathcal{P}(\lambda)$. Déterminer la loi marginale de la v.a. Y définie conditionnellement à X par,

$$\text{Sachant } [X=n], \quad Y\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p).$$

(6) (**D'après **EML 1994**) On suppose que le nombre N de colis expédiés à l'étranger chaque jour par une entreprise suit une loi de Poisson de paramètre 5. Ces colis sont expédiés indépendemment les uns des autres. La probabilité qu'un colis expédié à l'étranger soit déterioré est égale à $0,1$. On s'interresse aux colis expédiés à l'étranger un jour donné.

- N est la variable aléatoire égale au nombre de colis expédiés.
- X est la variable aléatoire égale au nombre de colis déteriorés.
- Y est la variable aléatoire égale au nombre de colis en bon état.

On a donc $N = X + Y$.

(a) Déterminer pour tout entier n et k la probabilité conditionnelle $P_{N=n}(X = k)$.
(b) Déterminer pour tout entier entier k la probabilité $P(X = k)$. Montrer que X suit une loi de Poisson de paramètre $0,5$.
(c) On admet que la loi de Y est une loi de Poisson de paramètre 4,5.
(d) Soient i et $j \in \mathbb{N}$.

(i) Déterminer la probabilité: $P(X = i \cap Y = j)$.
(ii) X et Y sont-elles indépendantes?

(7) (**D'après **ESC 2007**) On suppose qu'un moteur subit chaque jour un contrôle de pollution afin de voir si le taux de gaz carbonique émis est réglementaire (Si c'est bien le cas on dira que le contrôle est positif). On numérote ces contrôles à partir du jour numéro 1 et on les suppose indépendants.

À chacun de ces contrôles la probabilité d'être positif est $\frac{3}{5}$.

Au premier contrôle négatif, les réglages du moteur sont améliorés puis on le soumet le lendemain à une nouvelle séries de contrôles indépendants, à raison de un contrôle par jour.

À chacun de ces nouveaux contrôles la probabilité d'être positif est alors de $\frac{4}{5}$.

On note dans toute la suite X la variable aléatoire égale au numéro du jour du premier contrôle négatif et Y la variable aléatoire égale au numéro du jour du second contrôle négatif.

(a) Justifier que X suit une loi classique, qu'on détaillera, et donner son espérance et sa variance.

(b) (i) Que vaut $Y(\Omega)$?
(ii) Déterminer la loi du couple (X, Y).
(iii) Montrer que pour tout entier naturel $j \geq 2$,

$$P(Y = j) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^j - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^j.$$

Semaine du 12/11 au 16/11

Programme

- **Chapitre 5.** Intégralité.
- **Chapitre 6.** Paragraphes 1 à 4.
- Reprise du **DS n°2**.

Planche d'exercices

(1) Exercices semaine précédente.

(2) On considère l'application linéaire $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \to & (2x + y + z, x + y + t, x + z - t) \end{array}$.
(a) Déterminer une base du noyau de g.
(b) En déduire une base l'image de g.

(3) E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$.
Pour tout réel a, on considère l'endomorphisme f_a de E défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$$

(a) Déterminer une base de $\mathrm{Im}\,(f_a)$.
(b) Montrer qu'une base de $\mathrm{Ker}\,(f_a)$ est $(e_2,\ e_1 - e_3)$.

(4) Montrer que les applications suivantes sont des isomorphismes.
(a) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \to & (x-t, y+z, y-z, x+t) \end{array}$
(b) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2\,[X] & \to & \mathbb{R}_2\,[X] \\ P & \to & P + P' \end{array}$
(c) $f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \to & TMT \end{array}$ avec $T \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible.
(d) $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2\,[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \to & (P(0),\ P'(1),\ P''(0)) \end{array}$

(5) On considère les matrices $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note f l'application

$$f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{a+d}{2} I + \frac{b+c}{2} J.$$

(a) Calculer $f(I)$ et $f(J)$.
(b) Montrer que f est un endomorphisme.
(c) Déterminer une base du noyau de f. f est-elle injective ?
(d) En déduire le rang de f puis une base de l'image de f.

(6) On considère l'application

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3\,[X] & \to & \mathbb{R}_3\,[X] \\ P & \mapsto & Q(X) = P(X+1) - P(X) \end{array}$$

(a) Montrer que f est linéaire.
(b) Soit $P \in \mathbb{R}_0\,[X]$. Calculer $f(P)$. f est-elle injective ?
(c) Déterminer une base de l'image de f. f est-elle surjective ?
(d) Déterminer un polynôme de $\mathbb{R}_3\,[X]$ n'ayant pas d'antécédent par f.
(e) Déterminer une base du noyau de f.

(7) Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère l'application φ_A qui à toute matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe le produit AM.
(a) Montrer que φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(b) Montrer que si l'endomorphisme φ_A est bijectif, alors il existe une unique matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $AN = I_2$, où I_2 désigne la matrice identité d'ordre 2.
(c) Montrer que l'application φ_A est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ **si et seulement si** la matrice A est inversible.