ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Quinzaine de colle n°6

Période du 10/12 au 21/12

Semaine du 10/12 au 14/12

Programme

- **Chapitre 7.** Intégralité.
- **Chapitre 8.** Intégralité.

Questions de cours

(1) Rappeler la valeur de $I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t$. Établir, par un argument de comparaison, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la convergence de l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t.$$

Montrer, à l'aide d'une IPP que

$$I_{n+1} = (n+1)I_n$$

puis en déduire, par récurrence, la valeur de I_n. Établir un lien avec les moments de la loi exponentielle.

(2) Lois usuelles à densité. Formules des fonctions de densité, des fonctions de répartition, valeurs de l'espérance et de la variance.

(3) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1[)$. Déterminer la fonction de répartition et reconnaître la loi de $Z = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$.

(4) (`SciLab`) Écrire un script permettant de générer un échantillon de taille 1000 de la loi uniforme continue sur $[2;5]$. Représenter l'histogramme des valeurs obtenues par classes de largeur 0.1. Superposer la courbe de la densité de cette même loi sur le graphique obtenu.

Planche d'exercices

(1) (*)

(a) Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ x < 0 \\ 1 - \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)^2 e^{-x} & \text{si } \ x \geq 0 \end{cases}.$$

Montrer que X est une variable à densité et déterminer une densité de X.

(b) Même question pour $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-x)^\alpha & \text{si } x \in [0;1[\\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

(2) (*) Montrer que les fonctions suivantes sont des densités de probabilité puis déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire associée à cette densité.

$$(i)\ f(t) = \frac{ae^{-ax}}{(1+e^{-ax})^2} \quad (a \in \mathbb{R}_+^*), \qquad (ii)\ g(x) = \begin{cases} e^{-|x|} & \text{si } -\ln 2 \leq x \leq \ln 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(3) (**/***) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall y \in \mathbb{R},\ F(y) = \frac{1}{1+e^{-y}}$.
  (a) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.
  On dit alors que cette variable aléatoire suit la *loi logistique*.
  (b) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$.
  Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z = \ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$.

(4) (****EML 2015**) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} ne^{-x}(1-e^{-x})^{n-1}, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

  (a) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction f_n est une densité de probabilité.
  On note T_n une variable aléatoire admettant f_n pour densité.
  (b) Calculer $\lim_{x\to+\infty} x^3 f_n(x)$.
  (c) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la variable aléatoire T_n admet une espérance.
  (d) Déterminer l'espérance $E(T_1)$ de T_1.
  (e) (i) Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad f_{n+1}(x) - f_n(x) = -\frac{1}{n+1} f'_{n+1}(x).$$

  (ii) Montrer ensuite, à l'aide d'une intégration par parties :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \int_0^{+\infty} x(f_{n+1}(x) - f_n(x))\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x)\mathrm{d}x.$$

  (iii) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre $E(T_{n+1})$ et $E(T_n)$, puis une expression de $E(T_n)$ sous forme d'une somme.

Semaine du 17/12 au 21/12

Programme

- **Chapitre 8.** Intégralité.
- **Chapitre 9.** Paragraphes 1 et 2. Tout le monde aura à déterminer le spectre d'un endomorphisme *via* résolution d'un système à paramètre.

Questions de cours

(1) Lois usuelles à densité. Formules des fonctions de densité, des fonctions de répartition, valeurs de l'espérance et de la variance.

(2) Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1[)$. Déterminer la fonction de répartition et reconnaître la loi de $Z = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)$. En déduire l'écrire d'un script `SciLab` permettant de simuler la loi exponentielle de paramètre λ (sans la commande `grand()`).

(3) Définitions de valeur propre, spectre, vecteur propre, sous-espace propre. Liens entre les définitions (Théorème 1).

(4) Lien entre valeur propre et polynôme annulateur (+preuve). Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}$. Que peut-on dire du spectre de f?

Planche d'exercices

(1) (*) Exercices $1-(a)$ et $2-(ii)$ de la semaine précédente.

(2) (**) Exercice 804 Chapitre 8.

(3) (**/***) Exercice 814 Chapitre 8.

(4) (*) Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes, ainsi qu'une base des sous-espaces propres associés.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

(5) (*) Les matrices suivantes sont elle diagonalisables ? inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(6) (*/**) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 puis diagonaliser A.

(7) (*) Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$

(i) $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$, (ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (iii) .$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, (iv) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(8) (*)

(a) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes $X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que les vecteurs X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de A et déterminer les valeurs propres associées.

(b) Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Montrer que 3 est valeur propre de B et donner une base de l'espace propre E_3.

(ii) Déterminer sans calculs une autre valeur propre de B et donner une base de l'espace propre associé.

(c) Ces matrices sont-elles diagonalisables ?