ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
`http://frederic.gaunard.com`

Quinzaine de colle n°7

Période du 07/01 au 18/01

Semaine du 07/01 au 11/01

Programme

- **Chapitre 9.** Intégralité.

Questions de cours

(1) Définitions de valeur propre, spectre, vecteur propre, sous-espace propre. Liens entre les définitions (Théorème 1).

(2) Lien entre valeur propre et polynôme annulateur (+preuve). Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}$. Que peut-on dire du spectre de f?

(3) (**Exercice 13** très très soigneusement rédigé et expliqué.) On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Vérifier que 10 est valeur propre de M.
(b) Montrer, sans calcul supplémentaire, que M est diagonalisable.

Planche d'exercices

(1) (*) Déterminer les valeurs propres des matrices suivantes, ainsi qu'une base des sous-espaces propres associés.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

(2) (*) Les matrices suivantes sont elle diagonalisables ? inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \; ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \; ; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

(3) (*/**) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^2 puis diagonaliser A.

(4) (*) Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Si oui déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$

$$(i)\ A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}, \qquad (ii)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(iii)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (iv)\ A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(5) (*)

(a) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et les matrices colonnes

$$X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que les vecteurs X_1, X_2 et X_3 sont des vecteurs propres de A et déterminer les valeurs propres associées.

(b) Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(i) Montrer que 3 est valeur propre de B et donner une base de l'espace propre E_3.

(ii) Déterminer sans calculs une autre valeur propre de B et donner une base de l'espace propre associé.

(c) Ces matrices sont-elles diagonalisables ?

(6) (**Annales oraux ESM) Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$. On note id_E l'endomorphisme identité de E. On considère un endomorphisme u de E tel que

$$u^2 - 2u + \mathrm{id}_E = 0,$$

où on a noté $u^2 = u \circ u$.

(a) Montrer que u est inversible et calculer son inverse.

(b) Déterminer les valeurs propres de u. L'endomorphisme est-il diagonalisable?

(c) Montrer que $\mathrm{Im}(u - \mathrm{id}_E) \subset \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$. En déduire que $\dim(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)) \geq n/2$.

(7) (**D'après **EDHEC 2007**) Soit $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note φ l'application qui à toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe

$$\varphi(M) = M + {}^tM$$

(a) (i) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

(ii) Écrire la matrice A de φ dans $\mathcal{B}$.

(iii) En déduire que φ est diagonalisable et non bijectif.

(b) Calculer A^2 et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A^n = 2^{n-1}A.$$

(c) (i) Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Vect}(E_1,\ E_2 + E_3,\ E_4)$, puis établir que $\dim \mathrm{Im}(\varphi) = 3$.

(ii) En déduire la dimension de $\ker(\varphi)$ puis déterminer une base de $\ker(\varphi)$.

(iii) Etablir que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est le sous espace propre associé à la valeur propre 2
(iv) Donner, pour résumer, les valeurs propres de φ ainsi qu'une base de chacun des sous-espaces propres associés.

(8) (***D'après **HEC 2010**)
Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels.

Soit d l'application définie sur E qui à tout polynôme P, associe le polynôme $d(P) = P'$, où P' désigne la dérivée de P.

(a) Rappeler sans démonstration la dimension de E et la base canonique $\mathcal{B}$ de E.
(b) Montrer que d est un endomorphisme de E et donner la matrice associée à d dans la base $\mathcal{B}$.
(c) Déterminer le noyau de d, $\mathrm{Ker}(d)$, l'image de d, $\mathrm{Im}(d)$, ainsi que leurs dimensions respectives.
(d) Déterminer les valeurs propres de d ainsi que les polynômes propres associés (*i.e.* les vecteur propres). L'endomorphisme d est-il diagonalisable?

On désigne, pour $k \in \mathbb{N}$, par $\left(d^k\right)$, la suite d'endomorphismes de E définie par :

$$d^0 = I, \qquad d^{k+1} = d \circ d^k,$$

où I représente l'endomorphisme identité. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(d^k)$ désigne le noyau de d^k.

(a) (i) Déterminer, pour tout $k \in [\![1;4]\!]$, le sous espace $\mathrm{Ker}(d^k)$ ainsi que sa dimension.
(ii) Vérifier que pour tout $k \in [\![1;4]\!]$,

$$d\left(\mathrm{Ker}(d^k)\right) \subset \mathrm{Ker}(d^k).$$

(iii) Soit P un polynôme de degré r, avec $r \in [\![0;3]\!]$. Montrer que la famille $\left\{d^k(P) : 0 \leq k \leq r\right\}$ est libre.

(b) Dans cette question, on cherche à déterminer les sous espaces vectoriels F de E tels que

$$d(F) \subset F.$$

(i) Montrer que, si $P \in F$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d^k(P) \in F$.
(ii) On suppose que $\dim F = 1$. Montrer que F est un sous-espace propre de d. En déduire F.
(iii) On suppose que $\dim F = 2$. Montrer qu'il existe dans F un polynôme de degré supérieur ou égal à 1. En déduire F.
(iv) Déterminer F dans le cas où $\dim F = 3$.

Semaine du 14/01 au 18/01

Programme

- **Chapitre 9.** Intégralité.
- **Chapitre 10.** Continuité. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Gradient. Points critiques. Matrice Hessienne.

Planche d'exercices

(1) Exercices semaine précédente.

(2) Montrer que les fonctions suivantes sont continues sur $\mathbb{R}^2$

$$(i)\ (x,y) \mapsto x^4y^2 + 3x^2y - 2x + 1, \qquad (ii)\ (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2+1},$$

$$(iii)\ ,(x,y) \mapsto \ln(x)e^y, \qquad (iv)\ (x,y) \mapsto \frac{x+y}{e^y+1}$$

(3) Déterminer les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes

$$(i)\ f_1 :\ (x,y) \mapsto x^3+2xy+3xy^2+y^4-1, \qquad (ii)\ f_2 :\ (x,y)\mapsto (x^2+y^2)e^{x^2+y^2},$$

$$(iii)\ f_3 :\ (x,y)\mapsto \frac{x-y}{x^2+y^2+1}, \qquad (iv)\ f_4 :\ (x,y)\mapsto x^2e^y-1.$$

(4) Déterminer le domaine de définition et le représenter graphiquement pour chaque fonction suivante

$$(i)\ f_1 :\ (x,y)\mapsto \frac{xe^y}{y}+\ln(x),$$

(5) (D'après **ECRICOME 2000**) Soit T est l'ensemble des couples $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ solutions du système d'inéquations

$$x\geq \frac{1}{4},\quad y\geq\frac{1}{4},\quad x+y\leq\frac{3}{4}.$$

On note T' l'*intérieur* de T, à savoir l'ensemble des couples $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ solutions du système d'inéquations

$$x>\frac{1}{4},\quad y>\frac{1}{4},\quad x+y<\frac{3}{4}.$$

Soit f la fonction définie sur T par

$$f(x,y)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{2}{x+y}.$$

(a) Représenter, sur un même graphique, les domaines T et T'.

(b) On admet que T' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
  (i) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur T', puis déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 sur T' de la fonction f.
  (ii) Montrer que f n'admet pas de point critique sur T'.

(c) Démontrer par de simples considérations sur des inégalités que l'on a pour tout couple (x,y) de T

$$2\leq f(x,y)\leq\frac{16}{3}.$$

On considère alors une urne contenant des boules blanches (en proportion p), des boules rouges (en proportion r) et des boules vertes (en proportion u). On suppose que

$$p\geq\frac{1}{4},\qquad r\geq\frac{1}{4},\qquad u\geq\frac{1}{4},\qquad \text{et que}\qquad p+r+u=1.$$

On effectue indéfiniment des tirages successifs d'une boule dans cette urne **avec remise** entre deux tirages. Pour tout entier naturel $n\geq 1$, on note B_n (respectivement R_n, V_n) l'événement: "On obtient une boule blanche (respectivement rouge, verte) au $n^{ième}$ tirage".

On appelle X (resp Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première blanche (resp rouge) et on définit alors la variable $D=|X-Y|$ égale au nombre de tirages séparant la sortie de la première blanche et de la première rouge.

(a) Déterminer la loi de X. Faire de même pour Y. En déduire, sans calcul, que X et Y admettent des espérance et préciser $E(X)$ et $E(Y)$.

(b) Soient i et j des entiers naturels non nuls.
  (i) En distinguant les cas $i=j$, $i<j$ et $i>j$, exprimer l'événement $(X=i)\cap(Y=j)$ à l'aide des événements décrits dans l'énoncé.
  (ii) En déduire la loi du couple (X,Y).

(c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

(d) Soit k un entier naturel non nul, montrer l'égalité:

$$P(D=k)=\frac{pr}{p+r}\left[(1-p)^{k-1}+(1-r)^{k-1}\right].$$

(e) Montrer que D admet une espérance et que $E(D)=f(p,r)$. Encadrer alors $E(D)$.

(4) (D'après **EDHEC 2015**)

(a) Pour tout entier naturel k, on pose :

$$I_k=\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}\mathrm{d}t$$

(i) Justifier que I_0, I_1 et I_2 sont des intégrales convergentes et donner leur valeur (on pourra s'appuyer sur le cours de probabilité).

(ii) Pour tout réel a positif et tout entier naturel k, on pose

$$I_k(a)=\int_0^{a} t^k e^{-t}\mathrm{d}t.$$

Établir, en utilisant une intégration par parties, la relation suivante

$$I_{k+1}(a)=(k+1)I_k(a)-a^{k+1}e^{-a}.$$

(iii) En déduire que I_3 et I_4 sont des intégrales convergentes et vérifier que : $I_3=6$ et $I_4=24$.

(b) Déduire des questions précédentes que, pour tout couple (x,y) de réels,

$$\int_0^{+\infty}(y+xt+t^2)^2e^{-t}\mathrm{d}t$$

est une intégrale convergente.

On considère, pour tout la suite, la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y)=\int_0^{+\infty}(y+xt+t^2)^2e^{-t}dt$$

(a) (i) Vérifier que l'on a : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y)=2x^2+y^2+12x+4y+2xy+24$.

(ii) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

(b) (i) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f puis déterminer le seul point critique (a,b) de f.

(ii) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f et écrire la matrice hessienne $\nabla^2(f)(a,b)$ de f en son point critique.

(iii) Déterminer les valeurs propres de $\nabla^2(f)(a,b)$ et en déduire que f admet un extremum local m au point (a,b) dont on précisera la nature (minimum ou maximum) et la valeur.

(c) Le but de cette question est de montrer qu'en fait cet extremum est global.

(i) Compléter le membre de droite de l'égalité suivante :

$$2x^2+2xy+12x=2\left(x+\frac{y}{2}+3\right)^2-\dots$$

(ii) Compléter de même l'égalité : $\dfrac{y^2}{2}-2y+6=\dfrac{1}{2}(y-2)^2+\dots$

(iii) En déduire une autre écriture de $f(x,y)$ montrant que l'extremum trouvé plus haut est global.