Quinzaine de colle n°8

Période du 21/01 au 01/02

Semaine du 21/01 au 25/01

Programme

- **Chapitre 10.** Intégralité.

Question de cours

Définitions de Gradient, points critiques d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Soit f la fonction qui à tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ associe le réel $e^{-x^2-y^2}$. Déterminer les points critiques de la fonction f. Cette fonction présente-t-elle des *extrema*?

Planche d'exercices

(1) Montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et former leur gradient

$$(i)\ (x, y) \mapsto x^4y^2 + 3x^2y - 2x + 1, \qquad (ii)\ (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2 + 1},$$

$$(iii)\ , (x, y) \mapsto \ln(x)e^y, \qquad (iv)\ (x, y) \mapsto \frac{x + y}{e^y + 1}$$

(2) Déterminer les dérivées partielles premières et secondes des fonctions suivantes

$$(i)\ f_1 :\ (x, y) \mapsto x^3 + 2xy + 3xy^2 + y^4 - 1, \qquad (ii)\ f_2 :\ (x, y) \mapsto xe^{x^2+y^2},$$

$$(iii)\ f_3 :\ (x, y) \mapsto \frac{x - y}{x^2 + y^2 + 1}, \qquad (iv)\ f_4 :\ (x, y) \mapsto x^2e^y - 1.$$

(3) (**INCONTOURNABLE.**) Déterminer les extremums de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = xy(x + y - 1).$$

(4) (D'après **EDHEC 2005**) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\,(x, y) = x\,e^{x\left(y^2+1\right)}$
  (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
  (b) (i) Déterminer les dérivées partielles premières de f
    (ii) En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1, 0)$.
  (c) (i) Déterminer les dérivées partielles secondes de f.
    (ii) Montrer qu'effectivement, f présente un extremum local en A. En préciser la nature et la valeur.
  (d) (i) Montrer que: $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\,(x, y) \geq x\,e^x$.
    (ii) En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g\,(x) = x\,e^x$, conclure que l'extremum trouvé à précédemment est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

(5) (D'après **ECRICOME 2000**) Soit T est l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ solutions du système d'inéquations

$$x \geq \frac{1}{4}, \quad y \geq \frac{1}{4}, \quad x+y \leq \frac{3}{4}.$$

On note T' l'*intérieur* de T, à savoir l'ensemble des couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ solutions du système d'inéquations

$$x > \frac{1}{4}, \quad y > \frac{1}{4}, \quad x+y < \frac{3}{4}.$$

Soit f la fonction définie sur T par

$$f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{2}{x+y}.$$

(a) Représenter, sur un même graphique, les domaines T et T'.

(b) On admet que T' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
  (i) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur T', puis déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 sur T' de la fonction f.
  (ii) Montrer que f n'admet pas de point critique sur T'.

(c) Démontrer par de simples considérations sur des inégalités que l'on a pour tout couple (x,y) de T

$$2 \leq f(x,y) \leq \frac{16}{3}.$$

On considère alors une urne contenant des boules blanches (en proportion p), des boules rouges (en proportion r) et des boules vertes (en proportion u). On suppose que

$$p \geq \frac{1}{4}, \qquad r \geq \frac{1}{4}, \qquad u \geq \frac{1}{4}, \qquad \text{et que} \qquad p+r+u=1.$$

On effectue indéfiniment des tirages successifs d'une boule dans cette urne **avec remise** entre deux tirages. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note B_n (respectivement R_n, V_n) l'événement: "On obtient une boule blanche (respectivement rouge, verte) au $n^{ième}$ tirage".

On appelle X (resp Y) la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première blanche (resp rouge) et on définit alors la variable $D = |X - Y|$ égale au nombre de tirages séparant la sortie de la première blanche et de la première rouge.

(a) Déterminer la loi de X. Faire de même pour Y. En déduire, sans calcul, que X et Y admettent des espérance et préciser $E(X)$ et $E(Y)$.

(b) Soient i et j des entiers naturels non nuls.
  (i) En distinguant les cas $i=j$, $i<j$ et $i>j$, exprimer l'événement $(X=i) \cap (Y=j)$ à l'aide des événements décrits dans l'énoncé.
  (ii) En déduire la loi du couple (X,Y).

(c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes?

(d) Soit k un entier naturel non nul, montrer l'égalité:

$$P(D=k) = \frac{pr}{p+r}\left[(1-p)^{k-1} + (1-r)^{k-1}\right].$$

(e) Montrer que D admet une espérance et que $E(D) = f(p,r)$. Encadrer alors $E(D)$.

Semaine du 28/01 au 01/02

Programme

- **Chapitre 10.** Intégralité.
- **Chapitre 11.** Inégalités de Markov et Bienaymé-Tchebychev. Loi faible des grand nombres. Convergence en loi (définition).

Questions de cours

- Énoncés des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

- Définition de la convergence en loi.

- Énoncé de la loi faible des grands nombres et démonstration à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

- En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que

$$\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t \geq \sqrt{2\pi}\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right).$$

Planche d'exercices

(1) Jean-Michel Charcuterie vend des saucissons sur le marché, le samedi matin. Il propose au choix deux type de friandises, le saucisson au poivre (que l'on notera A) et le saucisson aux truffes (noté B) et il dispose d'un stock de 40 exemplaires de A et 40 exemplaires de B. Chaque client demande soit A, soit B avec la probabilité $0,5$. Les demandes des clients sont indépendantes les unes des autres. Un samedi, 60 clients se présentent. On note x la probabilité de l'événement "Jean-Mi ne satisfait pas à toutes les demandes, cette matinée".
  (a) Déterminer la loi de Y, nombre de clients demandant le poivre dans la matinée.
  (b) Exprimer x à l'aide de Y .
  (c) Déduire de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev un majorant de x.

(2) Soit (X_n) une suite de v.a. telle que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)$. Montrer que X_n converge en loi vers Z, où $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(e^{-1})$.

(3) Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ n v.a. mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{U}([\![1;6]\!])$. On note $Z_n = \min(X_1, ..., X_n)$ et $Y_n = \max(X_1, ..., X_n))$.
  (a) Déterminer la loi de Y_n. Montrer que (Y_n) converge en loi vers une v.a. Y dont on précisera la loi.
  (b) Question analogue avec Z_n.

(4) Soit (X_n) une suite de v.a. mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$. On pose $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

  (a) Déterminer la loi de Y_n.
  (b) Expliciter $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
  (c) Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n \to +\infty} P\left(|Z_n - 2p| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

(5) 40% des individus d'une population possèdent un caractère C. On considère un échantillon de 200 indivi- dus. Peut-on affirmer, à 99%, que la probabilité de la fréquence d'apparition du caractère C dans l'échantillon soit comprise entre 30% et 50% ? On utilisera au choix l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

(6) Afin de progresser en maths, Jérémaille s'entraîne tous les soirs sur un exercice de l'un des trois grand thèmes du programme (Algèbre Linéaire (1), Probabilités (2) ou Analyse (3)). Il choisit le thème au hasard et ne travaille jamais deux soirs de suite sur le même thème. Le premier soir, il commence avec l'Algèbre. On note X_n la variable aléatoire correspondant au thème travaillé le soir n. On note

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$$

(a) Que vaut U_1 ?
(b) Déterminer une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $U_{n+1} = MU_n$.
(c) Diagonaliser M. En déduire M^n puis la loi de X_n.
(d) Montrer que X_n converge en loi vers une v.a. X à préciser.