ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Quinzaine de colle n°9

Période du 04/02 au 15/02

Semaine du 04/02 au 08/02

Programme

- **Chapitre 11.** Intégralité.

Questions de cours

- Énoncés des inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

- Définition de la convergence en loi.

- Énoncé de la loi faible des grands nombres et démonstration à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

- En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que
$$\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t \geq \sqrt{2\pi}\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right).$$

- Énoncé du théorème central limite.

- Soit (X_n) une suite v.a.i.i.d, où $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$. Montrer que
$$\sqrt{\frac{12}{n}}\sum_{k=1}^{n} X_n - \sqrt{3n} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z, \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Planche d'exercices

(1) Jean-Michel Charcuterie vend des saucissons sur le marché, le samedi matin. Il propose au choix deux type de friandises, le saucisson au poivre (que l'on notera A) et le saucisson aux truffes (noté B) et il dispose d'un stock de 40 exemplaires de A et 40 exemplaires de B. Chaque client demande soit A, soit B avec la probabilité $0,5$. Les demandes des clients sont indépendantes les unes des autres. Un samedi, 60 clients se présentent. On note x la probabilité de l'événement "Jean-Mi ne satisfait pas à toutes les demandes, cette matinée".
  (a) Déterminer la loi de Y, nombre de clients demandant le poivre dans la matinée.
  (b) Exprimer x à l'aide de Y .
  (c) Déduire de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev un majorant de x.
  (d) (**Ajout**) En approchant Y par la loi normale, donner une valeur approchée de x exprimée à l'aide de la fonction de répartition Φ de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

(2) Soit (X_n) une suite de v.a. telle que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)$. Montrer que X_n converge en loi vers Z, où $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(e^{-1})$.

(3) Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ n v.a. mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{U}([\![1;6]\!])$. On note $Z_n = \min(X_1, ..., X_n)$ et $Y_n = \max(X_1, ..., X_n))$.
  (a) Déterminer la loi de Y_n. Montrer que (Y_n) converge en loi vers une v.a. Y dont on précisera la loi.
  (b) Question analogue avec Z_n.

(4) Soit (X_n) une suite de v.a. mutuellement indépendantes de même loi $\mathcal{B}(p)$. On pose $Y_n = X_n + X_{n+1}$ et

$$Z_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

  (a) Déterminer la loi de Y_n.
  (b) Expliciter $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
  (c) Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} P\left(|Z_n - 2p| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

(5) 40% des individus d'une population possèdent un caractère C. On considère un échantillon de 200 indivi- dus. Peut-on affirmer, à 99%, que la probabilité de la fréquence d'apparition du caractère C dans l'échantillon soit comprise entre 30% et 50% ? On utilisera au choix l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

(6) Afin de progresser en maths, Jérémaille s'entraîne tous les soirs sur un exercice de l'un des trois grand thèmes du programme (Algèbre Linéaire (1), Probabilités (2) ou Analyse (3)). Il choisit le thème au hasard et ne travaille jamais deux soirs de suite sur le même thème. Le premier soir, il commence avec l'Algèbre. On note X_n la variable aléatoire correspondant au thème travaillé le soir n. On note

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$$

  (a) Que vaut U_1 ?
  (b) Déterminer une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $U_{n+1} = MU_n$.
  (c) Diagonaliser M. En déduire M^n puis la loi de X_n.
  (d) Montrer que X_n converge en loi vers une v.a. X à préciser.

(7) Soit (X_n) une suite v.a.i.i.d de loi commune $\mathcal{U}(]0;1])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$Y_n = e^{\sqrt{n}}\left(\prod_{k=1}^{n} X_i\right)^{1/\sqrt{n}}, \qquad L_n = \ln(Y_n).$$

  (a) Déterminer la loi de $-\ln(X_1)$. En déduire $E(\ln(X_1))$ et $V(\ln(X_1))$.
  (b) À l'aide du TCL, montrer que (L_n) converge en loi vers une variable dont on donnera la loi.
  (c) (i) Que vaut $Y_n(\Omega)$?
    (ii) Soit $t < 0$. Que vaut $\lim_{n\to+\infty} P(Y_n \leq t)$?
  (d) On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ \Phi(\ln(x)), & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

    (i) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z.
    (ii) Montrer que (Y_n) converge en loi vers Z.

Semaine du 11/02 au 15/02

Programme

- **Chapitre 11.** Intégralité.
- **Chapitre 12.** Estimation ponctuelle.
- Reprise éventuelle du DS4 (sujet A ou B).

Questions de cours

- Soit (X_n) une suite v.a.i.i.d, où $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$. Montrer que
$$\sqrt{\frac{12}{n}}\sum_{k=1}^{n} X_n - \sqrt{3n} \xrightarrow{\mathcal{L}} Z, \quad Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$
- Définition d'un estimateur non biaisé de θ à partir d'un $n-$échantillon $(X_1, ..., X_n)$ d'une variable X dépendant du paramètre θ. Définition d'estimateur asymptotiquement sans biais. Risque quadratique. Estimateur convergent.

Planche d'exercices

(1) Soit (X_n) une suite v.a.i.i.d de loi commune $\mathcal{U}(]0;1])$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note
$$Y_n = e^{\sqrt{n}}\left(\prod_{k=1}^{n} X_i\right)^{1/\sqrt{n}}, \qquad L_n = \ln(Y_n).$$
(a) Déterminer la loi de $-\ln(X_1)$. En déduire $E(\ln(X_1))$ et $V(\ln(X_1))$.
(b) À l'aide du TCL, montrer que (L_n) converge en loi vers une variable dont on donnera la loi.
(c) Que vaut $Y_n(\Omega)$?
(d) Soit $t < 0$. Que vaut $\lim_{n\to+\infty} P(Y_n \leq t)$?
(e) On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par
$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0 \\ \Phi(\ln(x)), & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
(i) Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire Z.
(ii) Montrer que (Y_n) converge en loi vers Z.

(2) Proposer un estimateur sans biais du paramètre λ d'une loi de Poisson à partir d'un $n-$échantillon de celle-ci. Quel est son risque quadratique?

(3) (German Tank Problem)

La méthode que nous allons présenter fut utilisée par les forces alliées durant la seconde guerre mondiale afin d'estimer l'étendue de la production allemande de tanks. Les forces de l'Axe étaient alors repérées par des numéros de séries consécutifs.

Dans notre modélisation, les allemands disposent de N tanks numérotés de 1 à N. Les force alliées observent aléatoirement, uniformément et "avec remise" n numéros de séries $(X_1, ..., X_n)$ et cherchent à estimer le paramètre N.

On pose $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ et $S_n = \max(X_1, ..., X_n)$.

(a) Déterminer $E(\overline{X}_n)$ et en déduire un estimateur T_n de N sans biais en fonction de $\overline{X}_n$.
(b) Calculer le risque quadratique de T_n et montrer que cet estimateur est convergent.
(c) Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(S_n \leq k)$.

(d) Soit Y un v.a à valeurs dans $[\![1;N]\!]$. Montrer que

$$E(Y)=\sum_{k=1}^{N}P(Y\geq k).$$

(e) Montrer alors que

$$E(S_n)=N-\sum_{k=0}^{N-1}\left(\frac{k}{N}\right)^n.$$

(f) Vérifier que, pour tout $k\in[\![0;N-1]\!]$,

$$0\leq\left(\frac{k}{N}\right)^N\leq\int_{k/N}^{(k+1)/N}t^n\mathrm{d}t.$$

(g) En déduire que l'estimateur S_n est asymptotiquement sans biais.

(4) Soit (X_n) une suite v.a.i.i.d de loi $\mathcal{B}(p^2)$. On cherche à estimer p.
(a) Montrer que $E(\overline{X}_n)-E\left(\sqrt{\overline{X}_n}\right)^2>0$.
(b) En déduire que l'estimateur $T_n=\sqrt{\overline{X}_n}$ n'est pas sans biais.
(c) Soit $\varepsilon>0$.
(i) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à $\overline{X}_n$.
(ii) Montrer, en distinguant deux cas $x\leq y$ et $x>y$, que pour tous $x,y\in[0;1]$, on a $|\sqrt{x}-\sqrt{x}|\leq\sqrt{|y-x|}$.
(iii) En déduite que l'estimateur T_n est convergent.

Exercice d'annales

Dans cet exercice R désigne un réel fixé strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{si } t\notin[0\,;\,R]\\ \frac{2t}{R^2}, & \text{si } t\in[0\,;\,R]\end{cases}$$

On admet que f est une densité de probabilité (il est capital de savoir le montrer). On note dans toute la suite X une variable aléatoire réelle de densité f et F_X désigne sa fonction de répartition.

(2) (a) Déterminer la valeur $F_X(x)$ lorsque $x<0$, puis lorsque $x>R$.
(b) Montrer que pour tout réel x de $[0\,;\,R]$,

$$F_X(x)=\frac{x^2}{R^2}.$$

(3) Montrer que X admet une espérance et une variance et que

$$E(X)=\frac{2R}{3},\qquad V(X)=\frac{R^2}{18}.$$

Dans toute la suite n désigne un entier naturel non nul et $(X_1,...,X_n)$ un $n-$échantillon de X visant à estimer le réel R. On note

$$T_n=\frac{3}{2n}\sum_{k=1}^{n}X_k.$$

(3) Montrer que T_n est un estimateur sans biais de R et calculer son risque quadratique noté $r(T_n)$.

(4) On note $M_n=\max(X_1,...,X_n)$.
(a) Montrer que pour tout réel x , $\mathrm{P}(M_n\leq x)=(F_X(x))^n$. En déduire la fonction de répartition de M_n, puis montrer que M_n est une variable aléatoire à densité.

(b) Montrer qu'une densité possible de M_n est la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_n(t) = \begin{cases} \dfrac{2nt^{2n-1}}{R^{2n}}, & \text{si } t \in [0\,;\,R] \\ 0, & \text{si } t \notin [0\,;\,R] \end{cases}$$

(c) Montrer que M_n admet une espérance et une variance, et que:

$$E\left(M_n\right) = \frac{2n}{2n+1}R \qquad \text{et} \qquad V\left(M_n\right) = \frac{n}{(n+1)\left(2n+1\right)^2}R^2.$$

(d) Calculer le biais de M_n, noté $b\left(M_n\right)$, et son risque quadratique noté $r\left(M_n\right)$.

(5) (a) Déterminer un équivalent simple lorsque n tend vers $+\infty$ de $b\left(M_n\right)$ et $r\left(M_n\right)$.

(b) Quels sont les avantages et les inconvénients réciproques des estimateurs T_n et M_n ?