ECE 2 - Année 2018-2019
Lycée français de Vienne
Mathématiques - F. Gaunard
http://frederic.gaunard.com

Retour sur le programme (3). Séances ciblées.

Séances 1 & 2 - SciLab pour les nuls

0 - Compétences générales

Exercice 1. (**)

(1) Rappeler la formule du triangle de Pascal liant les coefficients $\binom{n-1}{k-1}$, $\binom{n-1}{k}$ et $\binom{n}{k}$.
(2) Compléter le programme suivant pour qu'il affiche les N premières lignes du triangle de Pascal

```
N=input('N=?')
M=zeros(N,N)
for n=1:N
    M(n, 1) = ...............
end
for n=............................
    for k=.........................
        M(n,k)=................. //M(n,k) correspond à k parmi n
    end
end
disp(M)
```

1 - Calcul d'un entier n qui vérifie une condition

Exercice 2. (*D'après **EDHEC 2016**) On considère une suite (u_n) qui vérifie, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$e^{-\sqrt{u_n}} \leq u_n - n \leq e^{-\sqrt{n}}.$$

(1) Compléter les commandes SciLab suivantes qui permettent de calculer et d'afficher un entier n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

```
n=0;
while ...........
    n=...........
end
disp(n)
```

(2) Le Script ci-dessus affiche l'une des trois valeurs $n = 55, n = 70$ ou $n = 85$. En prenant $2,3$ comme valeur approchée de $\ln(10)$, déterminer laquelle.

Exercice 3. (*D'après **EML 2016**) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x\ln(x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

et la suite (u_n) définie par la relation de récurrence

$$u_0 = \frac{1}{2}, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

(1) *Démontrer que (u_n) est croissante et converge vers* 1.
(2) Écrire un programme sous `SciLab` qui calculer et affiche un entier N tel que

$$1 - u_N < 10^{-4}.$$

Exercice 4. (*D'après **EML 2015**) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 e^x$.
(1) Montrer la convergence de la série $\sum \frac{1}{f(n)}$. On note S sa somme.
(2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}.$$

(3) En déduire l'écriture d'un programme sous `SciLab` qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-5} près.

Exercice 5. (*D'après **EML 2017**) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = e^x - e\ln(x)$ et la suite (u_n) définie par la relation de récurrence

$$u_0 = 2, \qquad u_{n+1} = f(u_n).$$

(1) *Montrer que (u_n) est croissante et diverge vers $+\infty$.*
(2) Écrire un programme sous `SciLab` qui, étant donné un réel A rentré par l'utilisateur, calcule et affiche un entier naturel N tel que $u_n \geq A$.

2 - Simulation de v.a.r

Exercice 6. (*D'après **ECRICOME 2017**) Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimité de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.
Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre n de boules contenues dans l'urne, afin qu'elle simule la variable aléatoire T_n:

```
function y=T(n)
    S = ..........
    y = ..........
    while ..........
        tirage = grand(1,1,'uin',1,n)
        S = S + tirage
        y = ..........
    end
endfunction
```

Exercice 7. (*D'après **EML 2017**) On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges. On effectue, dans cette urne, des tirages successifs de la façon suivante: on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la couleur de celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note B_k : "la boule tirée au $k-$ième tirage est bleue" et R_k l'évènement: "la boule tirée au $k-$ième tirage est rouge".

(1) Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages, n étant l'entier entré en argument.

```
function s=EML_17(n)
    b=1; //b représente le nombre de boules bleues dans l'urne
    r=2; //r représente le nombre de boules rouges dans l'urne
    s=0; //s représente le nombre de boules rouges obtenues en n tirages
    for k=1:n
        x=rand();
        if ............................ then
            .................................
        else
            .................................
        end
    end
endfunction
```

(2) L'exécution du programme ci-dessous renvoie `6.657`. Comment interpréter ce résultat?

```
n=0;
m=0;
for k=1:1000
    m=m+EML_17(n);
end
disp(m/1000)
```

Exercice 8. (*D'après **EML 2015**) On considère une v.a. U telle que $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$ et on introduit la v.a. V définie par

$$V = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U),$$

où λ est un réel strictement positif.

(1) Montrer que $V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

(2) En déduire l'écriture d'une fonction `SciLab`, notée `y=loi_expo(lambda)` qui, prenant en argument un paramètre `lambda` renvoie une simulation de la loi exponentielle $\mathcal{E}$(`lambda`).

3 - Valeur approchée d'une espérance

Exercice 9. (Extrait de **HEC 2015**) On considère une v.a. $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ (où $\lambda > 0$) et F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = \exp\left(e^{-\lambda x}\right).$$

On *peut montrer* que F est la fonction de répartition d'une v.a. T (loi de Gumbel de paramètre λ). On peut aussi montrer que

$$Z = -\frac{1}{\lambda}\ln(\lambda X)$$

suit la même loi que T.

(1) On considère $\lambda = 1$. Écrire en `Scilab` les commandes qui permettent de simuler la loi de T.

(2) Écrire en `Scilab`, par la méthode de Monte-Carlo, les commandes qui permettent de renvoyer une valeur numérique approchée de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt.$$

4 - Représentations graphiques

Exercice 10. (*D'après **ECRICOME 2015**) On s'intéresse à la suite récurrente (u_n) définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = 1 - \exp(-u_n).$$

(1) Compléter le programme ci-dessous permettant le calcul des 100 premiers éléments de (u_n)

```
U=zeros(1, 100)
U(1)=...............
for n=1: ...............
    U(n+1)=..........
end
plot2d(.........., U, -1)
```

(2) On modifie le programme précédent en remplaçant la dernière ligne par les instructions suivantes

```
X=1:100
S=cumsum(U)
Y=log(X)
plot2d(X, S, -1)
plot2d(X, Y)
```

(3) Que représente le vecteur `S`? Quelle conjecture pouvez-vous émettre sur la nature de la série terme général u_n?

Séance 3 - Limites et équivalents

Exercice 1. (**)

(1) À l'aide de manipulations sur les équivalents déterminer la limite de (u_n) (lorsque $n \to +\infty$) dans chacun des cas suivants:

$$(i)\ u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n, \qquad (ii)\ u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n, \qquad (iii)\ u_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n,$$

$$(iv)\ u_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n, \qquad (v)\ u_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n.$$

(2) Trouver un équivalent simple aux suites suivants

$$(i)\ u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}, \qquad (ii)\ v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}, \qquad (iii)\ w_n = \frac{n^3 - \sqrt{1+n^2}}{\ln(n) - 2n^2}.$$

(3) Utiliser des équivalents pour déterminer les limites

$$(i)\ \lim_{x\to+\infty} \sqrt{4x+1} \ln\left(1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right), \qquad (ii)\ \lim_{x\to+\infty} \exp\left(\frac{1}{x^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$$

(4) Déterminer le DL à l'ordre 2 en 0 de

$$f(x) = \int_0^x e^{t^2} dt.$$

(5) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = xe^{-n/x}$. Montrer que
$$f_n(x) = x - n + \frac{n^2}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$
En déduire une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ et préciser les positions relatives.

(6) (****) Montrer, après avoir justifié par négligeabilité de la convergence de l'intégrale pour tout $x > 0$, que
$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{e^{-x}}{x}\right).$$

(7) (****) Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n} k! \underset{n\to+\infty}{\sim} n!.$$

Exercice 2. (**Critères de comparaison)

(1) Déterminer la nature des intégrales suivantes
$$(i)\ \int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}\mathrm{d}t, \qquad (ii)\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+e^x}\mathrm{d}x, \qquad (iii)\ \int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{t^2}{2t+1}}\mathrm{d}t, \qquad (iv)\ \int_0^{1} \frac{\ln(x)}{1-x^2}\mathrm{d}x.$$

(2) Déterminer la nature des séries suivantes
$$(i)\ \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2+\sqrt{n}}, \qquad (ii)\ \sum_{n\geq 1} n\ln\left(\frac{1+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\right), \qquad (iii)\ \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^{3/2}}$$

Séance 4 - Couples de v.a.d. Calculs de covariance.

Exercice 1. (*) On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n. La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.
Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

(1) Déterminer la loi du couple (X, Y)
(2) Calculer $P(X = Y)$
(3) Déterminer la loi de Y et $E(Y)$.

Exercice 2. (**) On considère une urne contenant 3 jetons numérotés de 1 à 3. On effectue dans cette urne des tirages **avec remise** et on introduit la v.a. Y correspondant au nombre de tirages effectués avant d'obtenir deux tirages successifs distincts.

(1) Déterminer la loi de Y.
(2) Calculer $E(Y)$ puis $V(Y)$.

On note alors Z la v.a. correspondants au nombre de tirages nécessaires avant l'obtention des trois jetons consécutivement.

(3) Montrer que
$$P_{(Y=k)}(Z=j) = \begin{cases} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{j-k-1}, & \text{si } 2 \leq k < j \\ 0, & \text{sinon .} \end{cases}$$
(4) Déterminer la loi du couple (Y, Z).
(5) En déduire la loi de Z.

Exercice 3. (**) Une urne contient des boules numérotées de 1 à n (où $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$). On effectue deux tirages **sans remise** dans cette urne et on note X (resp. Y) le plus petit (resp. grand) numéro obtenu.

(1) Déterminer les lois de X et Y ainsi que $E(X)$ et $E(Y)$.
(2) Montrer que
$$P(X = i \cap Y = j) = \begin{cases} \frac{2}{n(n-1)}, & \text{si } 1 \leq i < j \leq n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$
(3) Montrer que
$$E(XY) = \frac{(n+1)(3n+2)}{12}$$
et en déduire la $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice 4. (**) On considère une urne contenant k boules jaunes et on la complète avec un nombre N aléatoire de boules mauves, toutes indiscernables au toucher. On suppose que N suit une loi de Poisson de paramètre λ et on tire successivement et avec remise des boules de l'urne jusqu'à ce qu'on obtienne une boule jaune. On note alors T le nombre de tirages effectués.

(1) Que se passe-t-il dans le cas particulier $N = 0$?
(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, quelle est la loi conditionnelle de T sachant $N = n$?
(3) Calculer l'espérance de T.
(4) On réitère l'expérience sans changer la composition de l'urne (et après avoir remis la boule jaune). Calculer la covariance entre T et le nouveau nombre de tirages T' effectués.

Exercice 5. (*) On considère trois portes numérotées de 1 à 3. On ouvre l'une des portes au hasard de façon équiprobable et on note X son numéro. Puis deux personnes choisissent indépendamment l'une des deux portes restantes de façon équiprobable. On note Y et Z les numéros respectifs des portes qu'ils ont choisies.

(1) Déterminer la loi de Y sachant $X = 1$.
(2) Déterminer la loi de Y.
(3) Calculer $P(Y = Z = 1)$. Les variables Y et Z sont-elles indépendantes?
(4) Calculer la covariance de Y et Z.

Exercice 6. (****) Soit $(X_1, ..., X_n)$ un $n-$uplet de v.a. finies.

(1) Rappeler la formule liant $V(X_1 + X_2)$ et $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.
(2) Montrer, par récurrence sur n, que
$$V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$
(3) Qu'obtient-on sur les variables sont mutuellement indépendantes?

Séance 5 - À la recherche des valeurs propres et des sous-espaces propres

Exercice 1. (*) Déterminer le spectre de chacune des trois matrices suivantes ainsi que les sous-espaces propres associés. Les matrices sont-elles diagonalisables? Préciser, le cas échéant, la matrice de passage vers une base de vecteurs propres.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta \\ 0 & \delta & 0 \end{pmatrix} \quad (\delta \in \mathbb{R}).$$

Exercice 2. (*) On considère la matrice
$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Calculer U^2 et l'exprimer en fonction de U et I_4.
(2) En déduire le spectre de U et une base de chaque sous-espace propre.

Exercice 3. (**) Soit n un entier $n \geq 2$. Discuter, selon i et j, le caractère diagonalisable des matrices $E_{i,j}$ (éléments de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Exercice 4. (**) À quelle condition sur $m \in \mathbb{R}$ la matrice M ci-dessous admet-elle deux valeurs propres distinctes ?

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. (***) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et

$$M = \left(\begin{array}{c|c} 0_n & A \\ \hline I_n & 0_n \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}).$$

(1) Montrer que λ valeur propre de M si et seulement si λ^2 est valeur propre de A. (On écrira une chaîne d'équivalences en partant de $MX = \lambda X$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec $x, y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
(2) Donner alors une condition suffisante sur A pour que M soit diagonalisable.

Exercice 6. (**) Soient $m > 0$ et

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Exprimer M^2 en fonction de M et I_3.
(2) En déduire les valeurs propres de M et les sous-espaces propres associés.

Séance 6 - Calculs d'intégrales

Exercice 1. (*)

(1) À l'aide du changement de variables $u = \ln(t)$, calculer l'intégrale

$$J = \int_1^e \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{1+\ln(t)}}.$$

(2) À l'aide d'un changement de variables affine, calculer, pour tout réel t,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{tx-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{d}x.$$

(3) Justifier de la convergence et calculer les intégrales ci-dessous avec le changement de variable proposé

$$(i) \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}, \quad \text{en posant } u = \sqrt{1+x^2}, \quad \left(\textit{indication: } \frac{1}{u^2-1} = \frac{1}{2(u-1)} - \frac{1}{2(u+1)}\right)$$

$$(ii) \int_0^{+\infty} te^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t, \quad \text{en posant } u = \sqrt{t}, \quad (\textit{indication: IPP successives}).$$

Exercice 2. (**)

(1) Justifer de la convergence de l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

(2) À l'aide du changement de variable $u = 1/t$, montrer que $I = 0$.

Exercice 3. (**) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 (1-t^2)^n \mathrm{d}t.$$

(1) Montrer que (I_n) est décroissante.
(2) Montrer que, pour tout $u \in [0;1]$

$$0 \leq 1-u \leq e^{-u}.$$

(3) En déduire, à l'aide du changement de variables $x = \sqrt{n}u$ que

$$I_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} \mathrm{d}x.$$

(4) Montrer qu'il existe une constante $M \geq 0$ telle que

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2} \mathrm{d}x = \int_0^1 e^{-x^2} \mathrm{d}x + \int_1^{\sqrt{n}} e^{-x} \mathrm{d}x \leq M.$$

(5) En déduire la limite de (I_n).
(6) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que, pour tout $n \geq 1$,

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}.$$

(7) En déduire, par récurrence, que

$$I_n = \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Séance 7 - Intervalles de confiance[1]

Dans toute cette partie Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 1. (**) Soit X une variable aléatoire d'espérance m et de variance σ^2. On considère un $n-$échantillon $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de X et on note

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \qquad \overline{X}_n = \frac{S_n}{n}.$$

(1) Expliquer pourquoi l'intervalle

$$\left[\overline{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}};\ \overline{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n\alpha}}\right]$$

fournit un intervalle de confiance (exact) pour m au risque α.
(2) Expliquer pourquoi, en notant $u_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha/2)$, l'intervalle

$$\left[\overline{X}_n - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha;\ \overline{X}_n + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_\alpha\right]$$

fournit un intervalle de confiance asymptotique pour m au risque α.

(3) **Application.** On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ et on cherche à estimer p (qu'on ne connait pas). On ne connait donc *a fortiori* pas non plus la variance. Expliquer comment obtenir des intervalles de confiance (exact et asymptotique) pour m (au risque α) qui ne dépendent pas de σ.

Exercice 2. (*D'après **ESSEC II 2016**) Soit X d'espérance m et de variance σ^2. On considère alors un $n-$échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de X et on pose $T_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$. On suppose que σ^2 est connue, mais pas m.

(1) Déterminer $E(T_n)$ et $V(T_n)$.

[1] `https://www.youtube.com/watch?v=MdPOAZrrayM`

(2) Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$

$$P\left(|T_n - nm| > n\varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon}.$$

(3) Quel est le risque de l'intervalle de confiance

$$\left[\frac{T_n}{n} - \varepsilon;\ \frac{T_n}{n} + \varepsilon\right]$$

pour m?

Exercice 3. (*)Dans le cadre d'une étude sur la santé au travail, on a interrogé au hasard 500 salariés de différents secteurs et de différentes régions de France. 145 d'entre eux déclarent avoir déjà subi un harcèlement moral au travail.

(1) Donner une estimation ponctuelle de la proportion de salariés ayant déjà subi un harcèlement moral au travail.
(2) Donner une estimation de cette proportion par un intervalle de confiance à 90%.
(3) Si avec les mêmes données on calculait un intervalle de confiance à 95%, serait-il plus grand ou plus petit que celui trouvé à la question précédente ? (justifier sans calcul.)

Exercice 4. (**) José et Josette jouent au poker. Chacun tire ainsi deux cartes dans un jeu de 52. Sur 100 parties, Josette a tiré 25 fois une paire.

(1) Calculer la probabilité d'obtenir une paire lors d'un tirage de deux cartes.
(2) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, peut-on dire que Josette triche au risque $\alpha = 0.05$?
(3) En utilisant le théorème central limite, peut-on dire que Josette triche au risque $\alpha = 0.05$?

Exercice 5. (*) Soient θ un paramètre réel strictement positif et X une v.a. de densité f donnée par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2}, & \text{si } x \in]0;\theta] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Enfin, on considère un $n-$échantillon $(X_1, X_2, .., X_n)$ de X.

(1) Calculer l'espérance et la variance de X. Déterminer la fonction de répartition F de X.
(2) On notant $\overline{X}_n$ la moyenne empirique de l'échantillon, déterminer un estimateur sans biais T_n de θ de la forme $T_n = c\overline{X}_n$. Préciser son risque quadratique.
(3) On pose $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$. Déterminer la fonction de répartition G_n et une densité g_n de M_n.
(4) En déduire un estimateur W_n, à partir de M_n, sans biais de θ. Calculer son risque quadratique.
(5) Entre W_n et T_n, quel estimateur choisir?
(6) Soit α un réel compris strictement entre 0 et 1.
   (a) Montrer qu'il existe deux réels a, b strictement compris entre 0 et 1 tels que
   $$P(M_n \leq a\theta) \leq \frac{\alpha}{2}, \quad \text{et} \quad P(b\theta \leq M_n \leq \theta) = \frac{\alpha}{2}.$$
   (b) En déduire un intervalle de confiance pour θ au risque $1 - \alpha$.

Séances 8 & 9 - Les exercices d'AL de chez HEC

Exercice 1. Dans tout l'exercice, N désigne un nombre entier supérieur ou égal à 1.
On note $\mathbb{R}_N[X]$ l'espace vectoriel formé des polynômes de degré inférieur ou égal à N et du polynôme nul. On désigne par Id l'application identique de $\mathbb{R}_N[X]$ dans $\mathbb{R}_N[X]$.

(1) Soit a un nombre réel non nul et P un élément de $\mathbb{R}_N[X]$.
Justifier que $P(aX + 1 - a)$ (c'est-à-dire la fonction : $x \longmapsto P(ax + 1 - a)$) est un polynôme de même degré que P.

Dans toute la suite de l'exercice, pour tout réel a non nul, on note f_a l'application de $\mathbb{R}_N[X]$ dans $\mathbb{R}_N[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $P(ax+1-a)$.

(2) Soient a et b des nombres réels non nuls.
  (a) Montrer que : $f_b \circ f_a = f_{ab}$.
  (b) Démontrer que f_a est un isomorphisme de $\mathbb{R}_N[X]$, et préciser sa bijection réciproque, notée $(f_a)^{-1}$.
  (c) On pose : $(f_a)^0 = Id$ et, pour tout entier naturel n : $(f_a)^{n+1} = (f_a)^n \circ f_a$.
  Démontrer que, pour tout entier naturel n : $(f_a)^n = f_{a^n}$.

(3) Pour tout réel a non nul, on note M_a la matrice de f_a dans la base canonique $(1, X, \dots, X^N)$ de $\mathbb{R}_N[X]$.
  (a) Dans cette sous question seulement, on suppose $N = 3$.
  Expliciter alors la matrice M_a ainsi que son inverse.
  (b) Dans le cas général, donner le coefficient de la $(i+1)$-ième ligne et $(j+1)$-ième colonne de M_a (i et j entiers compris au sens large entre 0 et N).
  (c) n désignant un entier naturel, justifier l'égalité : $(M_a)^n = M_{a^n}$.
  Ce résultat reste-t-il valable si n est un entier négatif ?

(4) Préciser l'ensemble des valeurs propres de f_a.
Pour tout entier k compris au sens large entre 0 et N, calculer $f_a\left((X-1)^k\right)$.
L'endomorphisme f_a est-il diagonalisable ?

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes à coefficients réels et $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1.

(1) *Exemple 1.* Soit A la matrice de $\mathcal{B}_2(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
  (a) Calculer A^2.
  (b) Quelles sont les valeurs propres de A?
  (c) La matrice A est-elle diagonalisable?

(2) *Exemple 2.* Soit B la matrice de $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ définie par : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On considère les instructions et la sortie `SciLab` suivantes :

```
B=[0,1,0;1,0,0;0,0,1]
P=[1,1,0;1,-1,0;0,0,1]
inv(P)*B*P
```

```
-->
1.    0.    0.
0.   -1.    0.
0.    0.    1.
```

  (a) Déduire les valeurs propres de B de la séquence `Scilab` précédente.
  (b) Donner une base de chacun des sous-espaces propres de B.

(3) (a) Combien existe-t-il de matrices appartenant à $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$?
  (b) Combien existe-t-il de matrices de $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ dont chaque ligne et chaque colonne comporte exactement un coefficient égal à 1?

(4) Dans cette question, n est un entier supérieur ou égal à 2.
Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E. On note :
- id l'endomorphisme identité de E;
- F le noyau de l'endomorphisme $(u + id)$ et G le noyau de l'endomorphisme $(u - id)$;
- p la dimension de F et q la dimension de G.

On suppose que $u \circ u = id$.

(a) Justifier que l'image de $(u - id)$ est incluse dans F.

(b) En déduire l'inégalité : $p + q \geq n$.

On suppose désormais que $1 \leq p < q$. Soit $(f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une base de F et $(g_1, g_2, \ldots, g_q)$ une base de G.

(c) Justifier que $(f_1, f_2, \ldots, f_p, g_1, g_2, \ldots, g_q)$ est une base de E.

(d) Calculer $u(g_1 - f_1)$ et $u(g_1 + f_1)$;

(e) Trouver une base de E dans laquelle la matrice de u appartient à $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Soit m un réel donné strictement positif et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.

Pour tout endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$, on pose $g^0 = \mathrm{Id}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $g^k = g \circ g^{k-1}$.

(1) Déterminer le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ et l'image $\mathrm{Im}(f)$ de l'endomorphisme f. La matrice M est-elle inversible ?

(2) (a) Montrer que la matrice M^2 est une combinaison linéaire de I et de M.

(b) Déterminer un polynôme annulateur non nul de la matrice M.

(c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M. La matrice M est-elle diagonalisable ?

(3) À l'aide des résultats de la question 2.c), indiquer une méhode, sans faire les calculs, qui permettrait d'obtenir pour tout n de $\mathbb{N}$, I'expression de M^n en fonction de n.

(4) On pose : $p = \frac{1}{3}(f + Id)$ et $q = -\frac{1}{3}(f - 2Id)$.

(a) Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$, puis pour tout. n de $\mathbb{N}$, p^n et q^n.

(b) En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de f^n en fonction de p et q.

(c) Déterminer les deux suites réelles $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout n de $\mathbb{N}$, on a

$$M^n = a_n I + b_n M.$$

(d) La formule précédente reste-elle valable si n appartient à $\mathbb{Z}$?

Exercice 4. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère un vecteur v **fixé** de $\mathbb{R}^3$. On considère également l'application f qui à tout vecteur $u = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$ associe le vecteur $f(u)$ définie par :

$$f(u) = u - (a + b + c)v$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

(2) **Étude d'un cas particulier.** Dans cette question 3 seulement, on suppose que $v = (2, -1, 0)$.

(a) Vérifier que $f(v) = 0$. f est-il un automorphisme ?

(b) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(c) On note $w = (-1, 1, 0)$ et $z = (0, -1, 1)$. Montrer que la famille (w, z) est également une base de $\mathrm{Im}(f)$.

(d) En déduire, sans calculs supplémentaires, une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

(e) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v, w, z)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(f) Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ puis dans la base $\mathcal{C}$.

(3) **Retour au cas général.** On suppose maintenant que $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ vérifie $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

(a) Montrer que $f(v) = 0$.

(b) En déduire que $f \circ f = f$.

(c) Montrer que le vecteur y appartient à $\text{Im}(f)$ **si et seulement si** $f(y) = y$.
(d) En déduire que les vecteurs $e_2 - e_1$ et $e_3 - e_2$ appartiennent à $\text{Im}(f)$.
(e) Déduire de la question 3a que $\text{rg}(f) \leq 2$.
(f) Déterminer une base de $\text{Im}(f)$.
(g) Déterminer, en fonction de (α, β, γ) la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Cette matrice est-elle inversible ?
(h) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v, e_2 - e_1, e_3 - e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice 5.
Partie 1

(1) Soit M la matrice définie par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Déterminer le spectre de$M$. La matrice M est-elle diagonalisable ?
(b) Préciser le rang des matrices M et M^2.
(c) Montrer que les polynômes de la forme $P(X) = aX^3$, avec $a \in \mathbb{R}$, sont les seuls polynômes annulateurs de degré 3 de M.

(2) Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que $f^n = 0$. Pour $j \in [\![0; n]\!]$, on note F_j l'image de l'endomorphisme f^j et $r_j = \text{rg}(f^j) = \dim(F_j)$. Pour tout $j \in [\![0; n-1]\!]$, on note g_j la restriction de l'endomorphisme f à F_J, c'est à dire que, pour tout $x \in F_j$,

$$g_j(x) = f(x).$$

(a) Calculer r_0 et r_n.
(b) Soit $j \in [\![0; n-1]\!]$.
  (i) Déterminer le rang de g_j.
  (ii) Justifier l'égalité : $r_j - r_{j+1} = \dim\left(\text{Ker}(f) \cap F_j\right)$.
(c) Établir les inégalités

$$n \geq r_0 - r_1 \geq r_1 - r_2 \geq .... \geq r_{n-1} - r_n \geq 0.$$

Partie 2

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note $P(k)$ l'ensemble des $k-$uplets d'entiers $(x_1, ..., x_k)$ tels que

$$\sum_{i=1}^{k} i x_i = k$$

et $p(k)$ le **cardinal** de $P(k)$.

(1) Pour tout $i \in [\![1; n]\!]$, on pose $x_i = \{j \in [\![0; n-1]\!] : \ r_j - r_{j+1} = i\}$.
(a) Montrer que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est un élément de $P(n)$.
(b) Dans cette question, on suppose que $n = 4$.
  (i) Déterminer (x_1, x_2, x_3, x_4) lorsque f est l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice M de la **Partie 1** est la matrice dans la base canonique.
  (ii) Trouver l'ensemble $P(4)$ et vérifier que $p(4) = 5$.
  (iii) Montrer que pour tout $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in P(4)$, il existe un endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ tel que

$$x_i = \{j \in [\![0; n-1]\!] : \ r_j - r_{j+1} = i\}.$$

(2) Pour tout couple $(\ell, k) \in (\mathbb{N}^*)^2$, on pose

$$Q(\ell, k) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P(k);\ x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leq \ell\}$$

et $q(\ell, k) = Card(Q(\ell, k))$.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

(i) Trouver l'ensemble $Q(1, k)$.

(ii) Pour tout entier $\ell \geq k$, justifier l'égalité : $Q(\ell, k) = P(k)$.

(b) (****) Pour tout couple (ℓ, k) d'entiers tels que $k > \ell \geq 2$, établir la relation :

$$q(\ell, k - \ell) = Card\left(\{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in P(k);\ x_1 + x_2 + \ldots + x_k = \ell\}\right)$$

(c) Soit ℓ un entier supérieur ou égal à 2.

(i) Pour tout entier $k > \ell$, montrer l'égalité : $q(\ell, k) = q(\ell - 1, k) + q(\ell, k - \ell)$.

(ii) Que vaut $q(\ell, \ell) - q(\ell - 1, \ell)$?

(3) La fonction `SciLab` suivante dont le script est incomplet (lignes (5) et (6)), calcule une matrice `qmatrix(n)` telle que pour chaque couple $(\ell, k) \in [\![1, n]\!]^2$, le coefficient situé à l'intersection de la ligne ℓ et de la colonne k est égal à $q(l, k)$.

```
(1) function q=qmatrix(n)
(2)     q=ones(n,n)
(3)     for L=2:n
(4)         for K=2:n
(5)             if (K<L) then q(L,K)= .........;
(6)                  else if (K==L) then q(L,K)= ............ ;
(7)                       else q(L,K)=q(L-1,K)+q(L,K-L);end;
(8)              end;
(9)         end;
(10)    end;
(11) endfunction
```

L'application de la fonction `qmatrix` à l'entier $n = 9$ fournit la sortie suivante :

```
--> qmatrix(9)

   1.   1.   1.   1.   1.   1.    1.    1.    1.
   1.   2.   2.   3.   3.   4.    4.    5.    5.
   1.   2.   3.   4.   5.   7.    8.    10.   12.
   1.   2.   3.   5.   6.   9.    11.   15.   18.
   1.   2.   3.   5.   7.   10.   13.   18.   23.
   1.   2.   3.   5.   7.   11.   14.   20.   26.
   1.   2.   3.   5.   7.   11.   15.   21.   28.
   1.   2.   3.   5.   7.   11.   15.   22.   29.
   1.   2.   3.   5.   7.   11.   15.   22.   30.
```

(a) Compléter les lignes (5) et (6) du script de la fonction `qmatrix`.

(b) Donner un script `SciLab` permettant de calculer $p(n)$ à partir d'une valeur de n entrée au clavier.

(c) Conjecturer une formule générale pour $q(2, k)$ applicable à tout entier $k \geq 1$, puis la démontrer.

Séance 10 - Dénombrements délicats

Exercice 1. (*) Rappeler la démonstration par un argument de dénombrement de la formule du triangle de Pascal.

Exercice 2. (**) Soit n un entier non nul. On désigne par u_n le nombre de listes de n termes, chaque terme étant 0 ou 1, et n'ayant pas deux termes 1 consécutifs (on peut donc répéter les 0).

(1) Que vaut u_1? u_2?
(2) Démontrer que, pour tout $n \geq 3$, on a $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.
(3) Écrire un programme `SciLab` permettant de calculer u_{20}.
(4) *Application* : un concours comporte vingt questions, numérotées de 1 à 20. On a constaté que, parmi les 17712 personnes ayant participé au concours, aucune n'a répondu juste à deux questions consécutives. Peut-on affirmer que deux candidats au moins ont répondu de la même manière au questionnaire, c'est-à-dire juste aux mêmes questions et faux aux mêmes questions?

Exercice 3. Dans un groupe d'amis, il y a n filles et n garçons (et donc $2n$ personnes). On choisit au hasard des *duos* pour une session Karaoké; tous les duos passeront à la suite des autres.

(1) Combien y a-t-il de listes ordonnées de *duos*? (Une telle liste contient n élements, chacun de ces éléments étant donc un *duo* d'amis mélomanes.)
(2) Combien de ces listes sont formées uniquement de *duos* mixtes?
(3) Quelle est donc la probabilité de ne voir passer que des *duos* mixtes toute la soirée ?

Exercice 4. (***) Une personne en état d'ébriété se déplace, en ligne droite, aléatoirement entre la sortie d'un bar et son domicile. À chaque instant, cette personne fait un pas vers l'avant ou un pas vers l'arrière. Son domicile se trouve à une distance de d pas (vers l'avant) du bar (mais la personne étant sérieusement atteinte, elle peut passer devant et continuer son chemin). Après n pas, peu importe où elle se trouve, cette personne s'écroule (dans la neige, pour donner une dimension plus dramatique au récit).

(1) Combien y a-t-il de "chemins" différents correspondants aux n déplacements?
(2) Parmi ces chemins, combien y en a-t-il qui reviennent exactement au bar?

Exercice 5. (***)

(1) Rappeler le cardinal de l'ensemble des parties $\mathcal{P}(E)$ d'un ensemble E à n éléments?
(2) Quel est donc le cardinal de $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$?
(3) Combien y a-t-il de couples de parties $(X, Y) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ tels que $X \subset Y$?

(4) (****) On propose de démontrer le résultat de la première question par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Vérifier que la formule est vraie pour $n = 0$.
   (b) On suppose que la formule est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soient E un ensemble à $n+1$ éléments et $a \in E$. On introduit

$$A = \{X \in \mathcal{P}(E) : \ a \in X\}, \qquad B = \{X \in \mathcal{P}(E) : \ a \notin X\} = \mathcal{P}(E \setminus \{a\})\,..$$

      (i) Quel est le cardinal de B?
      (ii) Quel est le lien entre $\mathcal{P}(E)$, A et B? En déduire une relation sur les cardinaux.
      (iii) Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & B & \longrightarrow & A \\ & X & \longmapsto & X \cup \{a\} \end{array}$$

      est une bijection. En déduire le cardinal de A.
      (iv) Conclure.

Exercice 6. (***) Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. On dispose de n jetons numérotés de 1 à n. On tire, au hasard, sans remise, les jetons un à un. La suite des numéros tirés, que l'on peut noter $(a_1, a_2, ..., a_n)$ est aussi appelée permutation de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$.

Étant donnés deux entiers k et p vérifiant $1 \leq k \leq p \leq n$, la suite $(a_k, a_{k+1}, ..., a_p)$ est appelée *sous-suite* de $(a_1, a_2, ..., a_n)$ et son nombre d'éléments est appelé *longueur* de cette sous-suite.

On admet que cette expérience aléatoire peut être modélisée par la donnée de l'univers Ω, ensemble des permutations de $\{1, 2, ..., n\}$, muni de la tribu de ses parties $\mathcal{P}(\Omega)$ et de la probabilité uniforme P.

(1) Soit $\omega \in \Omega$, que vaut $P(\{\omega\})$?

Étant donné une permutation $(a_1, a_2, ..., a_n)$, on définit la *première sous-suite croissante* de la façon suivante:

- dans le cas où $a_1 < a_2 < ... < a_n$, la première sous-suite croissante est $(a_1, a_2, ..., a_n)$;
- dans le cas contraire, si k est le plus petit entier de $\{1, 2, .., n-1\}$ vérifiant $a_k > a_{k+1}$, la première sous-suite croissante est $(a_1, a_2, ..., a_k)$.

Soit L la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ qui, à toute permutation ω, associe la longueur de sa première sous-suite croissante.

Par exemple, si $n = 9$ et $\omega = (2, 3, 5, 4, 9, 6, 7, 8, 1)$, la première sous-suite croissante est $(2, 3, 5)$ et sa longueur vaut 3, donc $L = 3$.

(2) Que vaut $P(A_n)$?

(3) Soit $k \in \{1, 2, ..., n\}$. Étant donnés k nombres, combien de suites formées avec ces k nombres sont strictement croissantes? En déduire qu'il y a $\binom{n}{k} \times (n-k)!$ façons de tirer une permutation dont la longueur de la première sous-suite est au moins k.

(4) En déduire que, pour tout $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$

$$P(L = k) = P\left(\bigcup_{j=k}^{n} [L = j]\right) - P\left(\bigcup_{j=k+1}^{n} [L = j]\right) = \frac{k}{(k+1)!}.$$

(5) Donner la valeur de $E(L)$ sous forme d'une somme et déterminer la limite de $E(L)$ quand n tend vers l'infini.

Étant donné une permutation $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et sa première sous-suite croissante $(a_1, \ldots, a_k)$; si celle-ci se termine par a_n (i.e. si $k = n$), on dit que la deuxième sous-suite croissante n'existe pas; dans le cas contraire, la première sous-suite croissante de $(a_{k+1}, \ldots, a_n)$ est appelée deuxième sous-suite croissante de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Soit L' la variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ qui, à toute permutation ω, associe 0 s'il n'existe pas de deuxième sous-suite croissante, et la longueur de la deuxième sous-suite croissante, dans le cas contraire.

Par exemple, si $n = 9$ et $\omega = (2, 3, 5, 4, 9, 6, 7, 8, 1)$, la deuxième sous-suite croissante est $(4, 9)$ et l'on a donc $L' = 2$.

(6) Quelles sont la plus petite et la plus grande des valeurs prises par L'? Que vaut $\mathbf{P}([L' = 0])$?

(7) On suppose, dans cette question seulement, que n est égal à 3.

(a) Montrer que la loi du couple (L, L') est donnée par le tableau suivant

$L' \backslash L$	1	2	3
0	0	0	1/6
1	1/6	1/3	0
2	1/3	0	0

(b) Donner la loi de L' et calculer son espérance.

(c) Calculer la covariance de L et de L'. Pouvait-on prévoir le signe de cette covariance?

(8) On suppose à nouveau que n est un entier quelconque supérieur ou égal à 2.

(a) Dénombrer les parties de l'ensemble $[\![1; n]\!]$ distinctes de $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \ldots, \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

(b) En déduire $P([L + L' = n])$.

(c) Montrer de même que, pour tout entier k de $\{1, 2, \ldots, n\}$, on a :
$$P([L + L' \geqslant k]) = \frac{2^k - k}{k!}\cdot.$$
(d) Donner la valeur de $E(L + L')$ sous forme d'une somme.
(e) En déduire $E(L')$ et sa limite quand n tend vers l'infini.

Séance 11 - Puissances de matrices

Exercice 1. (*FDB 1) Déterminer, à l'aide de la formule du binôme les puissances A^n où
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. (**FDB 2) Soient a et b deux réels, avec $b \neq 0$.
On considère la matrice M et N définies par
$$M = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \\ b & b & b & b \end{pmatrix}.$$

(1) Déterminer des réels x et y tels que $M = xN + yI$ où I est la matrice unité d'ordre 4.

(2) Compléter la fonction `SciLab` ci-dessous permettant de renvoyer la matrice M.

```
function M=matriceDM(a,b)
    M=...........*ones(4, 4) - (.........)*eye(4,4)
endfunction
```

(3) Calculer N^2. Conjecturer une formule pour N^k que l'on démontrera par récurrence.
(4) En déduire pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de M^n en fonction de I, de N et de n. On montrera que
$$M^n = (a - b)^n I + \frac{(a + 3b)^n - (a - b)^n}{4b} N.$$

Exercice 3. (*Division euclidienne) Soit U la matrice
$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Vérifier que $X^2 - 2X - 3$ est polynôme annulateur de U.
(2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer deux réels α_n et β_n coefficients du *reste* de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 2X - 3$
$$X^n = (X^2 - 2X - 3)Q(X) + \alpha_n X + \beta_n.$$
(3) En déduire l'expression de U^n.

Exercice 4. (**) Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ étant données, on suppose qu'il existe une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
$$L = AL + B.$$
On définit la suite de matrices (U_n) de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la manière suivante :
$$\begin{cases} U_0 & \in & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ U_{n+1} & = & AU_n + B, \qquad n \geq 0 \end{cases}.$$

(1) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$U_n = L + A^n (U_0 - L).$$

Dans la suite du problème les matrices A et B sont choisies de telle sorte que :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On note a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice A et b l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est la matrice B.

(2) Prouver que le vecteur $u = (x, y, z)$ appartient à l'image de b si et seulement si

$$-x + y + z = 0,$$

puis montrer que

$$\mathrm{Im}(b) = \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - a).$$

(3) Montrer que la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

peut être considérée comme la matrice de passage de la base canonique vers une base de vecteurs propres de a.

(4) Écrire les matrices D de a et B' de b dans cette base de vecteurs propres.
(5) Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$A^n = PD^nP^{-1}.$$

(6) En écrivant convenablement D^n comme la somme de trois matrices diagonales judicieusement choisies, prouver l'existence de trois matrices E, F, G indépendantes de n telles que pour tout entier naturel n :

$$A^n = E + \left(\frac{1}{2}\right)^n F + \left(\frac{1}{3}\right)^n G.$$

Expliciter uniquement la matrice E sous la forme d'un tableau de nombres.

(7) Déterminer par le calcul, une matrice L' de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{pmatrix}$ telle que :

$$L' = DL' + B'$$

(8) Montrer que la matrice $L = PL'P^{-1}$ vérifie:

$$L = AL + B.$$

(9) Établir que $EL = 0$.
(10) Montrer que chacun des coefficients de la matrice U_n a pour limite, lorsque n tend vers $+\infty$, les coefficients de la matrice $EU_0 + L$.

Séance 12 - Fonctions définies par des intégrales

Exercice 1. (*) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que :

$$f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t}\mathrm{d}t.$$

(1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs réelles telle que $g(t) = \dfrac{e^t}{t}$ et G une primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$.
  (a) Pour tout réel $x > 0$, exprimer $f(x)$ à l'aide de la fonction G.
  (b) Déduire de la question précédente que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel $x > 0$, calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
  (c) Calculer $f(1)$.

(2) (a) Établir pour tout réel $x \geq 1$, l'inégalité $f(x) \geq e \times \ln x$.
  (b) En déduire $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$.

(3) (a) Établir pour tout réel x de l'intervalle $]0,1]$, l'inégalité $f(x) \leq e^x \times \ln x$.
  (b) En déduire $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x)$.

(4) Dresser le tableau de variation de f.

(5) On note $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal (unité $1\ cm$ pour les abscisses et $e\ cm$ pour les ordonnées (on rappelle que le nombre e est à peu près égal à $2,7$.
  (a) On note f'' la dérivée seconde de f. Pour tout réel $x > 0$, calculer $f''(x)$.
  (b) Montrer que la courbe $(\mathcal{C})$ admet un point d'inflexion A et déterminer les coordonnées du point A.
  (c) Écrire l'équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C})$ au point A.
  (d) Tracer l'allure de la courbe $(\mathcal{C})$ en précisant la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{T})$.

(6) (a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un unique réel, noté u_n, vérifiant

$$\int_1^{u_n} \frac{e^t}{t} \mathrm{d}t = n.$$

  (b) En utilisant les variations de la fonction f, montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
  (c) Déterminer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$.

Exercice 2. (***D'après **EML 2005**) On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout réel t, par :

$$f(t) = \left\{ \begin{array}{cl} 0, & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{(1+t)^2}, & \text{si } t > 0 \end{array} \right. .$$

(1) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
(2) Montrer que f est une densité de probabilité.
(3) Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$$

converge, et calculer cette intégrale. *On distinguera les cas $x \leq 0$ et $x > 0$.*
(4) Déterminer un réel positif α tel que

$$\int_0^{\alpha} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

(5) Soit $x \in [0, +\infty[$ fixé.
On considère la fonction φ_x définie sur $[0; +\infty[$ par

$$\forall u \in [0, +\infty[, \qquad \varphi_x(u) = \int_{x-u}^{x+u} f(t)\mathrm{d}t.$$

  (a) Calculer $\varphi_x(0)$ et $\lim_{u \to +\infty} \varphi_x(u)$.

(b) Montrer

$$\forall (u,v) \in ([0,+\infty[)^2, \qquad (u<v) \implies \left(\varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geq \int_{x+u}^{x+v} f(t)\mathrm{d}t \right).$$

En déduire que φ_x est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

(c) On admet que φ_x est continue sur $[0;+\infty[$. Montrer que l'équation $\varphi_x(u) = 1/2$, d'inconnue u, admet une solution et une seule dans $[0;+\infty[$.

On note $U : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ l'application qui, à tout réel $x \in [0;+\infty[$, associe $U(x)$ l'unique solution de l'équation $\varphi_x(u) = \frac{1}{2}$.

Ainsi, pour tout $x \in [0;+\infty[$, on a

$$\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

(6) (a) Vérifier, pour tout $x \in [0;1/2[$, $U(x) = 1-x$.

(b) Pour tout $x \in [1/2;+\infty[$, montrer que

$$\varphi_x(x) \geq \frac{1}{2},$$

puis que $x - U(x) \geq 0$ En déduire alors que

$$U(x) = \sqrt{4+(x+1)^2} - 2.$$

Exercice 3. (***D'après **ESSEC II 2017**) Soit g une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, nulle sur $]-\infty,0]$, continue et strictement positive sur $]0,+\infty[$. On définit une fonction G sur $\mathbb{R}_+$ par

$$G(x) = \int_0^x g(v)\mathrm{d}v.$$

On suppose de plus que $\int_0^{+\infty} vg(v)\mathrm{d}v$ est convergente et on note m sa valeur.

(1) (a) Montrer que $m > 0$.

(b) Montrer que G est une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[0,1[$. On notera G^{-1} son application réciproque.

(c) Quel est le sens de variation de G^{-1} sur $[0,1[$?

(2) (a) A l'aide du changement de variable $u = G(v)$, établir que pour tout $t \in [0,1[$,

$$\int_0^t G^{-1}(u)du = \int_0^{G^{-1}(t)} vg(v)\mathrm{d}v.$$

(b) En déduire que $\int_0^1 G^{-1}(u)\mathrm{d}u$ converge et donner sa valeur.

(3) Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f(t) = \frac{1}{m}\int_0^t G^{-1}(u)\mathrm{d}u, \qquad t \in [0,1[\qquad \text{et} \qquad f(1) = 1.$$

(a) (i) Montrer que f est continue sur $[0,1]$.

(ii) Montrer que f est convexe sur $[0,1[$.

(b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, l'égalité

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{m}\int_0^\infty vg(v)G(v)\mathrm{d}v.$$

Séance 13 - Calculs lourds

Exercice 1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$. Déterminer la loi marginale de la v.a. Y définie conditionnellement à X par,

$$\text{Sachant } [X = n], \quad Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p).$$

Exercice 2. (Accélérateur de convergence) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$a_n = \frac{n-1}{n^3+1}, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

(1) Montrer que l'on a, pour $n \geqslant 2$:

$$0 < a_n < \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

En déduire que la série $\sum a_n$ est convergente. On notera A sa somme (qu'on ne cherchera pas à calculer explicitement).

(2) Donner, en fonction de n, un majorant très simple de $A - A_n$.

(3) À partir de quelle valeur de n, peut-on affirmer que A_n est une valeur approchée de A à moins de 10^{-4} près ?

(4) Pour accélérer la convergence, on pose :

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - b_n.$$

(a) Calculer b_n en fonction de n et vérifier que l'on a :

$$\forall n \geqslant 2, \quad 0 < b_n < \frac{6}{n^5} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{6}{t^5} \mathrm{d}t$$

(b) Vérifier que l'on a :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

et

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right).$$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^{\times}$, on pose

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Exprimer B_n en fonction de n et de A_n, en déduire que la suite (B_n) est convergente.

(d) Soit B la limite de la suite (B_n). Montrer que : $B - B_n \leq \dfrac{3}{2n^4}$.
A partir de quelle valeur de n peut-on affirmer que B_n est une valeur approchée de B à moins de 10^{-4} près ?
Conclure

Exercice 3. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty\,[$ par:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)\ln(x)}{2(x-1)}, & \text{si } x \neq 1 \\[2ex] 1, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

(1) Montrer que f est une fonction continue sur $]0, +\infty[$.

(2) Calculer la dérivée f' de f sur les intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. Étudier son signe et en déduire que f est monotone sur chacun de ces deux intervalles.

(3) Montrer que pour tout x strictement positif et différent de 1, la dérivée f' de f vérifie:

$$f'(x) = \frac{(x-1)-\ln(x)}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x}.$$

(4) À l'aide du développement limité de $\ln(1+x)$ à l'ordre 2 en 0, montrer que f est dérivable au point 1 et déterminer $f'(1)$. Montrer que f' est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Exercice 4. Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère deux variables aléatoires discrètes indépendantes X et Y telles que

$$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,x), \qquad Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n,y), \qquad (x,y \in]0;1[)$$

On pose alors Z la variable aléatoire discrète définie par l'égalité: $Z = 2n - X - Y$. On pose W la variable aléatoire définie par $W = XYZ$.

(1) Montrer que l'espérance de W est donnée par

$$E(W) = n^2(n-1)xy(2-x-y).$$

(2) On introduit l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ $D =]0,1[\times]0,1[$ et f la fonction de deux variables définie sur D par

$$f(x,y) = xy(2-x-y).$$

(a) Justifier que f est de classe C^2 sur D.
(b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f, en déduire le seul point (x_0,y_0) de D susceptible de réaliser un extremum local pour f.
(c) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f, et montrer que f admet un maximum local en (x_0,y_0) de valeur $\dfrac{8}{27}$.
(d) Montrer que pour tout couple (x,y) de D :

$$f(x,y) - \frac{8}{27} = \frac{1}{4}\left(y-\frac{2}{3}\right)^2\left(y-\frac{8}{3}\right) - y\left(x+\frac{1}{2}y-1\right)^2$$

En déduire que ce maximum local est un maximum global de f sur D.

Exercice 5. On considère trois suites (a_n), (b_n), (c_n) vérifiant

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & a_n + \frac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} & = & \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} & = & \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n \end{array}\right. , \qquad a_0 = c_0 = 0,\ b_0 = 1.$$

(1) Exprimer b_{n+2} à l'aide de b_{n+1}, b_n et c_n puis exprimer c_n en fonction de b_{n+1} et b_n pour obtenir enfin une relation entre b_{n+2}, b_{n+1} et b_n.

(2) En déduire une expression de b_n en fonction de n. On fera intervenir les nombres

$$\alpha = \frac{5-\sqrt{5}}{8} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{5+\sqrt{5}}{8}.$$

(3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$c_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\beta^n - \alpha^n\right).$$

Problèmes type ESSEC/HEC

Les exercices proposés reprennent des parties des sujets posés à l'ESSEC ces dernières années introduisant de nouvelles notions et pour lesquelles s'entraîner permet de développer sa capacité d'adaptation.

Exercice 1. (***Limite inférieure - D'après **ESSEC II 2015**)

Si a et b sont deux entiers tels que $a \leq b$. Pour $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de réels et I ensemble fini d'entiers naturels, on notera $\min_{i\in I}\ x_i$ le plus petit élément de l'ensemble $\{x_i, i \in I\}$. Par exemple,

$$\min_{i\in[\![1;9]\!]} \frac{1}{i} = \frac{1}{9}.$$

(1) Un exemple : déterminer $\displaystyle\min_{i\in[\![0;4]\!]} \frac{(-1)^i}{i+1}$.

(2) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs. Pour n entier naturel fixé, on pose pour tout k de $\mathbb{N}$,

$$u_n(k) = \min_{i\in[\![n;n+k]\!]} x_i.$$

(a) Montrer que la suite $(u_n(k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
(b) En déduire que la suite $(u_n(k))_{k\geq 0}$ est convergente. On note

$$u_n = \lim_{k\to+\infty} u_n(k).$$

(c) Établir une inégalité entre les réels $u_{n+1}(k)$ et $u_n(k+1)$ et en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
(d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ admet une limite (qui peut être $+\infty$).

Cette limite est dite **limite inférieure de la suite** $(x_n)_{n\geq 0}$ et est notée $\displaystyle\liminf_{n\to+\infty} x_n$.

(3) Soient les deux suites réelles positives $(y_n)_{n\geq 0}$ et $(z_n)_{n\geq 0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n = 1 + (-1)^n, n \geq 0$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad z_n = \begin{cases} 2, & \text{si } n \text{ est pair} \\ n, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

(a) Expliciter pour n positif ou nul et k supérieur ou égal à 1 les termes $u_n(k)$ associés à chacune des deux suites $(y_n)_{n\geq 0}$ et $(z_n)_{n\geq 0}$.
(b) Déterminer $\displaystyle\liminf_{n\to+\infty} y_n$ et $\displaystyle\liminf_{n\to+\infty} z_n$.

(4) (a) On suppose ici que $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de réels positifs. Comparer u_n et x_n et en déduire que si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge en croissant vers un réel ℓ, alors

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \ell.$$

(b) Montrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante de réels positifs, convergente vers un réel ℓ, alors

$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \ell.$$

(c) (i) Soient $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r$ des réels donnés et soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout i tel que $1 \leq i \leq r$, α_i appartient à I. Montrer que

$$\min_{i\in[\![1;r]\!]} \alpha_i \in I.$$

(ii) Démontrer que si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de réels positifs convergente vers ℓ réel positif, on a
$$\liminf_{n\to+\infty} x_n = \ell.$$

(5) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Pour x réel positif fixé, on définit la fonction φ_x sur $\mathbb{R}_+$ par
$$\forall h \geq 0, \quad \varphi_x(h) = \min_{u\in[x,x+h]} f(u).$$

(a) Montrer que la fonction φ_x est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
(b) En déduire que $\varphi_x(h)$ a une limite dans $\mathbb{R}_+$ quand h tend vers $+\infty$. On note Φ_x cette limite.
(c) Montrer que $x \mapsto \Phi_x$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
(d) En déduire que la limite $\lim_{x\to+\infty} \Phi_x$ existe (noter qu'elle peut valoir $+\infty$).

On la nomme **la limite inférieure de** f et elle est notée
$$\liminf_{x\to+\infty} f(x).$$

(e) Un exemple : soit f la fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ définie par :
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \text{ appartient à } [0,1] \\ 2-x, & \text{si } x \text{ appartient à } [1,2] \end{cases}$$
et telle que $f(x) = f(x+2)$ pour tout réel positif x (on dit que f est périodique de période 2).

(i) Représenter graphiquement f sur le segment $[0,4]$.
(ii) Que vaut $\varphi_x(h)$ pour x positif et h supérieur ou égal à 2 ?
(iii) En déduire Φ_x puis $\liminf\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

(f) Soit f de nouveau une fonction quelconque continue sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. On reprend les notations de 5a et 5b.

(i) Soit x un réel positif. Montrer que pour tout réel h positif, on a $f(x) \geq \varphi_x(h)$.
(ii) En déduire l'inégalité $\Phi_x \leq f(x)$.
(iii) On suppose que
$$\liminf_{x\to+\infty} f(x) > 0.$$
Montrer qu'il existe deux réels x_0 et ε strictement positifs tels que pour tout x supérieur ou égal à x_0 on a $f(x) \geq \varepsilon$.

(g) Soit f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ telles que $f(x) \geq g(x)$ pour tout x positif, et
$$\liminf_{x\to+\infty} g(x) = \ell$$
où ℓ est un réel positif. Montrer que
$$\liminf_{x\to+\infty} f(x) \geq \ell.$$

Exercice 2. (***Value at Risk - D'après **ESSEC I 2016**)

On s'intéresse dans ce problème à deux mesures du risque utilisées par les marchés financiers.

Pour cela, on considère des variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, qui modélisent des pertes financières subies par des acteurs économiques sur une période donnée.

Toutes les variables aléatoires définies dans ce problème sont des variables aléatoires sur cet espace probabilisé.

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des variables aléatoires réelles à densité X vérifiant :

- X admet une espérance notée $E(X)$.

- Il existe un intervalle I_X (dont on admet l'unicité) sur lequel la fonction de répartition de X, notée F_X, réalise une bijection de classe C^1 strictement croissante de I_X sur $]0,1[$.
  On note G_X la bijection réciproque, définie de $]0,1[$ sur I_X. Les notations F_X et G_X seront utilisées dans tout le sujet.

Dans tout le problème β est un réel appartenant à $]0,1[$ et représentant un niveau de confiance.

Partie I - Définition et propriétés de la "Value at Risk"

(1) Soit $X \in \mathcal{D}$. Montrer qu'il existe un unique réel v tel que $P([X \leq v]) = \beta$, et que l'on a $v = G_X(\beta)$.

- On définit alors $r_\beta(X)$ appelé la "Value at Risk" au niveau de confiance β de X, par $r_\beta(X) = G_X(\beta)$. C'est une grandeur qui permet d'évaluer le risque pris par l'acteur qui détient l'actif dont les pertes sont modélisées par X.
- **On remarque que $r_\beta(X)$ est égal au capital minimal qu'il faut détenir pour être en mesure de couvrir les pertes de l'actif associé à X avec une probabilité égale à β**

(2) On suppose que, dans cette question, X est une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre $\lambda \in]0,+\infty[$.

(a) Rappeler la valeur de $F_X(x)$ pour tout réel x.
(b) En déduire que $X \in \mathcal{D}$ et que l'on a

$$r_\beta(X) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\beta).$$

(3) On suppose dans cette question que X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale de paramètres m et σ^2 pour X et de paramètres μ et s^2 pour Y.
On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et φ la densité usuelle de cette loi.

(a) (i) Justifier que Φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$. On note Φ^{-1} la bijection réciproque.
(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, exprimer $F_X(x)$ en fonction de Φ, m, σ et x.
(iii) En déduire que $X \in \mathcal{D}$ et que $r_\beta(X) = m + \sigma\Phi^{-1}(\beta)$.

(b) Quelle est la loi de $X+Y$? En déduire $r_\beta(X+Y)$ en fonction de m,μ, σ, s et β.
(c) Pour quels $\beta \in]0,1[$ a-t-on $r_\beta(X+Y) \leq r_\beta(X) + R_\beta(Y)$?

(4) Soit X une variable aléatoire appartenant à $\mathcal{D}$, c un réel et λ un réel strictement positif. On pose $Y = X + c$ et $Z = \lambda X$ et on admet que Y et Z appartiennent à $\mathcal{D}$.

(a) Montrer que $r_\beta(Y) = r_\beta(X) + c$.
(b) Montrer que $r_\beta(Z) = \lambda r_\beta(X)$.

(5) Soit X et Y deux variables aléatoires appartenant à $\mathcal{D}$ et telles que pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$.
(a) Comparer, pour tout réel x, $F_X(x)$ et $F_Y(x)$.
(b) En déduire que $r_\beta(X) \leq r_\beta(Y)$.

Partie II - Estimation de la valeur de $r_\beta(X)$

Dans la pratique la loi de X n'est pas totalement connue et on a besoin d'avoir une idée assez précise de la "Value at Risk" ne connaissant qu'un certain nombre de valeurs de cette variable.

On modélise cette situation en supposant, dans cette partie, que la loi de X dépend d'un paramètre θ inconnu appartenant à un sous ensemble Θ de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$, que $r_\beta(X) = g(\theta)$ où g est une fonction définie sur Θ et que pour tout $\theta \in \Theta$, $X \in \mathcal{D}$.

On utilise aussi les hypothèses et notations suivantes:

- $(X_k)_{k\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires réelles appartenant à $\mathcal{D}$, mutuellement indépendantes, de même loi que X.
- pour tout $\omega \in \Omega$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on ordonne $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ dans l'ordre croissant et on note alors $X_{1,n}(\omega), \ldots, X_{n,n}(\omega)$ les valeurs obtenues.
  En particulier, $X_{1,n}(\omega)$ est la plus petite des valeurs $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ et $X_{n,n}(\omega)$ la plus grande.
- on admet que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$, les $X_{k,n}$ sont des variables aléatoires.
- pour tout réel x et tout entier naturel non nul n, on définit la variable aléatoire $N_{x,n}$ ainsi : pour tout $\omega \in \Omega$, $N_{x,n}(\omega)$ est le nombre d'indices k compris entre 1 et n tels que l'on ait $X_k(\omega) \leq x$.

(6) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $N_{x,n}$ suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. En déduire l'espérance et la variance de $N_{x,n}$.

(7) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} P\left(\left[\left|\frac{N_{x,n}}{n} - F_X(x)\right| \geq \varepsilon\right]\right) = 0.$$

(8) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il y a égalité entre les événements $[X_{k,n} \leq x]$ et $[N_{x,n} \geq k]$.

(b) En déduire que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$P([X_{k,n} \leq x]) = \sum_{r=k}^{n} \binom{n}{r} (F_X(x))^r (1 - F_X(x))^{n-r}$$

et que $X_{k,n}$ est une variable aléatoire à densité.

(9) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires et c un réel. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} P([|U_n - c| \geq \varepsilon]) = 0.$$

On considère $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite convergente de réels et on pose

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

(a) Établir que

$$\lim_{n\to+\infty} P([U_n \geq t]) = \begin{cases} 0, & \text{si } t > c \\ 1, & \text{si } t < c \end{cases}$$

(b) On suppose $\ell > c$ et on pose $\varepsilon = \dfrac{\ell - c}{2}$.
En remarquant que $\ell - \varepsilon = c + \varepsilon$, montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq c + \varepsilon$.
En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} P([U_n \geq u_n]) = 0.$$

(c) Montrer de même que si $\ell < c$,

$$\lim_{n\to+\infty} P([U_n \geq u_n]) = 1.$$

(10) On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\beta \geq 1$, la variable aléatoire Y_n sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ par $Y_n = X_{\lfloor n\beta \rfloor, n}$ où $\lfloor n\beta \rfloor$ désigne la partie entière de $n\beta$ et on pose $\theta' = r_\beta(X)$.
Soit $\varepsilon > 0$.

(a) Montrer que : $P([|Y_n - \theta'| \leq \varepsilon]) = P([Y_n \leq \theta' + \varepsilon]) - P([Y_n \leq \theta' - \varepsilon])$.

(b) En déduire que

$$P([|Y_n - \theta'| \leq \varepsilon]) = P\left(\left[\frac{N_{\theta'+\varepsilon,n}}{n} \geq \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right]\right) - P\left(\left[\frac{N_{\theta'-\varepsilon,n}}{n} \geq \frac{\lfloor n\beta \rfloor}{n}\right]\right)$$

(c) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} P([|Y_n - \theta'| \leq \varepsilon]) = 1.$$

Que peut-on en déduire concernant l'estimateur Y_n de $r_\beta(X)$?

(11) On suppose que l'on a défini un fonction d'en-tête `function R=triCroissant(T)` qui renvoie le tableau des valeurs se trouvant dans `T` rangées dans l'ordre croissant.

Par exemple, si `T=[0 -1 0 2 4 2 3]` alors `disp(triCroissant(T))` affiche :

```
ans =

-1.   0.   0.   2.   2.   3.   4.
```

Écrire une fonction `Scilab` d'en-tête `function r=VaR(X,beta)` qui renvoie la valeur de l'estimation obtenue avec l'estimateur Y_n pour $r_\beta(X)$ si le tableau `X` contient la réalisation de l'échantillon $(X_1, \ldots, X_n)$ et `beta` la valeur de β.

Exercice 3. (*Lois de Laplace - D'après **ESSEC I 2017**)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta > 0$. On dit qu'une variable aléatoire réelle à densité suit une loi de Laplace de paramètre (α, β), notée $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$, si elle admet comme densité la fonction f donnée par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|t-\alpha|}{\beta}\right)$$

(1) Vérifier que f est bien une densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle.

(2) Déterminer la fonction de répartition, notée Ψ, de la loi $\mathcal{L}(0,1)$.

(3) On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0,1)$.

(a) Montrer que $\beta X + \alpha$ suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

(b) En déduire la fonction de répartition de la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

(4) *Espérance et variance.*

(a) On suppose que X suit la loi $\mathcal{L}(0,1)$.
Montrer que $E(X)$ et $V(X)$ existent et valent respectivement 0 et 2.

(b) En déduire l'existence et les valeurs de l'espérance et de la variance d'une variable aléatoire réelle qui suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$.

(5) *Simulation à partir d'une loi exponentielle.*

Soit U une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1 et V une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et indépendante de U.

(a) En utilisant le système complet naturellement associé à V, montrer que $X = (2V-1)U$ suit la loi $\mathcal{L}(0,1)$.

(b) Compléter la définition `Scilab` ci-dessous pour que la fonction ainsi définie réalise la simulation d'une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{L}(\alpha, \beta)$:

```
function r = Laplace(alpha,beta)

if ......... <= 1/2
  V = 1
else
  V = 0
end

X = (2*V - 1) * grand(1, 1, "exp", 1)

r = ...........

endfunction
```

Exercice 4. (***Lois $\varepsilon-$différentielles - D'après **ESSEC I 2017**)

Soit $\varepsilon > 0$. On dit que (X, Y), un couple de variables aléatoires, est un couple ε-différentiel si, pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$:

$$\mathrm{e}^{-\varepsilon} P([X \in I]) \leq P([Y \in I]) \leq \mathrm{e}^{\varepsilon} P([X \in I])$$

Intuitivement, les lois de X et Y seront d'autant plus proches que le plus petit ε tel que (X, Y) soit un couple ε-différentiel est proche de 0.

(1) Soit (X, Y, Z) un triplet de variables aléatoires réelles.
  (a) Montrer que si (X, Y) est ε-différentiel alors (Y, X) l'est aussi.
  (b) Montrer que si (X, Y) est ε-différentiel et (Y, Z) est ε'-différentiel alors (X, Z) est $(\varepsilon + \varepsilon')$-différentiel.

(2) Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes. On suppose que $X(\Omega) \cup Y(\Omega) = \{z_n / n \in J\}$ où J est un sous ensemble non vide de $\mathbb{N}$.

Montrer que (X, Y) est ε-différentiel si et seulement si

$$\forall n \in J, \quad \mathrm{e}^{-\varepsilon} P([X = z_n]) \leq P([Y = z_n]) \leq \mathrm{e}^{\varepsilon} P([X = z_n])$$

(3) *Premier exemple.*
Dans cette question, on suppose que X suit la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$, Z suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$ et elles sont indépendantes. On pose $Y = X + Z$.

  (a) Déterminer la loi de Y.
  (b) Établir que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$1 - p \leq \frac{P([Y = k])}{P([X = k])} \leq \frac{1}{1 - p}.$$

  (c) En déduire que (X, Y) est $-\ln(1 - p)$-différentiel.
  (d) Que ce passe-t-il lorsque p s'approche de 0 ou lorsqu'il s'approche de 1? Était-ce prévisible?

(4) On suppose que X et Y sont deux variables à densité de densités respectives f et g et de fonction de répartition F et G.

  (a) On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-\varepsilon} f(t) \leq g(t) \leq \mathrm{e}^{\varepsilon} f(t)$.
  Montrer que (X, Y) est ε-différentiel.

(b) On suppose dans la suite de cette question que (X,Y) est ε-différentiel.
Soit $h>0$ et $t\in\mathbb{R}$ où f et g sont continues.

Montrer que:
$$\mathrm{e}^{-\varepsilon}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}\leq\frac{G(t+h)-G(t)}{h}\leq\mathrm{e}^{\varepsilon}\frac{F(t+h)-F(t)}{h}$$
En conclure que
$$\mathrm{e}^{-\varepsilon}f(t)\leq g(t)\leq\mathrm{e}^{\varepsilon}f(t).$$

(5) *Deuxième exemple: lois de Cauchy.*
(a) Montrer que
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2+1}\mathrm{d}t$$
converge. On admet que cette intégrale est égale à π.
(b) On définit, pour $a>0$, la fonction f_a sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $t\in\mathbb{R}$,
$$f_a(t)=\frac{a}{\pi(t^2+a^2)}.$$
Montrer que f_a est une densité de probabilité d'une variable aléatoire à densité.
(c) On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires admettant comme densités respectives f_1 et f_a avec $a>1$. Montrer que (X,Y) est $\ln(a)$-différentiel.

(6) *Une première interprétation.*
On suppose que (X,Y) est un couple ε-différentiel et que U est une variable de Bernoulli de paramètre $p\in]0,1[$ indépendante de X et Y.

On définit la variable aléatoire Z par:
$$\forall\omega\in\Omega,\quad Z(\omega)=\begin{cases}X(\omega) & \text{si } U(\omega)=1\\ Y(\omega) & \text{sinon.}\end{cases}$$
(a) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ telle que $P([Z\in I])\neq 0$.
Montrer que :
$$P_{[Z\in I]}([U=1])=p\,\frac{P([X\in I])}{pP([X\in I])+(1-p)P([Y\in I])}.$$
En déduire que:
$$\frac{p}{p+(1-p)\mathrm{e}^{\varepsilon}}\leq P_{[Z\in I]}([U=1])\leq\frac{p}{p+(1-p)\mathrm{e}^{-\varepsilon}}$$
(b) Si ε est proche de zéro, le fait de disposer d'une information sur la valeur de Z change-t-il notablement le paramètre de la loi de U et par conséquent la probabilité d'en déduire la valeur prise par U?

Exercice 5. (**Distance entre probabilités - D'après **ESSEC II 2006**)

On considère un ensemble $\mathcal{K}$ qui peut être ou bien une partie finie de $\mathbb{N}$ ou bien égal à $\mathbb{N}$ tout entier. Sur l'espace probabilisable $(\mathcal{K},\mathcal{P}(\mathcal{K}))$, on définit deux probabilités P et Q et on note
$$p_k=P(\{k\})\quad\text{et}\quad q_k=Q(\{k\})\qquad(k\in\mathcal{K}).$$
En particulier, on a $p_k,q_k\geq 0$,
$$\sum_{k\in\mathcal{K}}p_k=\sum_{k\in\mathcal{K}}q_k=1,$$

et, si A est une partie de $\mathcal{K}$,

$$P(A) = \sum_{k \in A} p_k.$$

Si $\mathcal{K}$ est fini, on introduit la *distance en variation entre les probabilités* P et Q par la formule

$$D(P,Q) = \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{K}} |p_k - q_k|.$$

(1) On suppose dans cette question que $\mathcal{K} = \{0;1\}$.

Exprimer $D(P,Q)$, en fonction de p_1 et q_1.

(2) On suppose dans cette question que $\mathcal{K} = \mathbb{N}$.

(a) Montrer, à l'aide de l'inégalité triangulaire, que la série de terme général $|p_k - q_k|$ est convergente.

On généralise alors la définition de distance en variation entre des probabilités P et Q définies sur $\mathbb{N}$ en posant

$$D(P,Q) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} |p_k - q_k|.$$

(b) Vérifier que pour toute partie A de $\mathbb{N}$, $|P(A) - Q(A)| \leq 1$.

(c) Montrer que, pour toute partie A de $\mathbb{N}$,

$$2|P(A) - Q(A)| = \left| \sum_{k \in A} (p_k - q_k) \right| + \left| \sum_{k \in \overline{A}} (p_k - q_k) \right|.$$

(d) En déduire que, pour toute partie A de $\mathbb{N}$,

$$|P(A) - Q(A)| \leq D(P,Q).$$

(e) Montrer qu'en prenant $A = \{k \in \mathbb{N} : \ q_k \geq p_k\}$, l'inégalité précédente devient une égalité.

(f) En déduire que

$$D(P,Q) = 1 - \sum_{k=0}^{+\infty} \min(p_k, q_k).$$

Exercice 6. (**D'après **HEC 2018**)

On considère des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivant chacune la même loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$, c'est à dire : $\forall k \in [\![1;n]\!],\ P([X_k = 1]) = p$ et $P([X_k = 0]) = 1 - p$.

On suppose que pour tout couple $(k,\ell) \in [\![1;n]\!]^2$ avec $k \neq \ell$, le coefficient de corrélation linéaire des variables X_k et X_ℓ est le même; on note r ce coefficient. On a donc :

$$\forall (k,\ell) \in [\![1;n]\!]^2, \qquad \frac{\operatorname{Cov}(X_k, X_\ell)}{\sqrt{V(X_k)V(X_\ell)}} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ r & \text{si } k \neq \ell \end{cases}$$

(1) (a) Dans les cas (i) et (ii) suivants, calculer la valeur de r et exprimer la variance de la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ en fonction de n et p.

(i) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

(ii) Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont toutes égales.

De plus, préciser la loi de $\sum_{k=1}^{n} X_k$ dans chacun des deux cas précédents.

(b) Montrer que pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la variance de la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{n} X_i$ est donnée par la formule :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = kp(1-p)(1+(k-1)r)$$

(c) En déduire que le coefficient r est au moins égal à $-\frac{1}{n-1}$.

(2) On suppose dans cette question que n est au moins égal à 2.

(a) Montrer que r est égal à -1 si et seulement si on a : $P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = p(2p-1)$.

(b) Que vaut alors $P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0])$?

(c) En déduire que le coefficient r ne peut-être égal à -1 que lorsque

$$p = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P([X_1 + X_2 = 1]) = 1.$$

(3) On suppose dans cette question que n est supérieur ou égal à 3 et que

$$P\left(\left[\sum_{k=1}^{n} X_k = 1\right]\right) = 1.$$

(a) Exprimer les valeurs de p et r en fonction de n.

(b) Déterminer les n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n$ pour lesquels la probabilité

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = x_k]\right)$$

est strictement positive et la calculer.

Exercices Bonus

Exercice 1

Soit a un nombre strictement positif. On définit, pour tout entier naturel n:

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{a+k}{2a+k}.$$

(1) Montrer que, pour tout réel $u \in]-1;+\infty[$, on a:

$$\frac{u}{1+u} \leq \ln(1+u) \leq u.$$

(2) En déduire que

$$\exp\left(-\sum_{k=0}^{n} \frac{a}{a+k}\right) \leq P_n \leq \exp\left(-\sum_{k=0}^{n} \frac{a}{2a+k}\right)$$

(3) Montrer qu'alors la suite (P_n) est convergente et déterminer sa limite.

(4) Discuter, en fonction de a, la nature de la série de terme général P_n. (*On pourra utiliser une comparaison série-intégrale.*)

(5) Calculer la valeur de la somme lorsque $a = 2$.

(6) Dans une urne, on dispose initialement une boule rouge et une boule noire (indiscernables au toucher). On tire ensuite une boule: si elle est noire, on arrête; si elle est rouge, on la remplace dans l'urne par deux boules rouges, et on recommence jusqu'à obtention de la boule noire. Que peut-on dire du nombre moyen de tirages effectués? Et si on était parti avec deux boules de chaque couleur?

Exercice 2

Soit $n \geq 2$.

(1) Pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixés, on pose

$$\Gamma_k = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \ A^k M = A^{k-1} M\}.$$

(a) Montrer que Γ_k est un espace vectoriel.

(b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a: $\Gamma_k \subset \Gamma_{k+1}$.

(2) Déterminer Γ_1, Γ_2 et Γ_3 dans le cas où $n = 3$ et où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(3) On revient au cas général.

(a) Montrer que si A est inversible, alors $\Gamma_1 = \Gamma_2$.

(b) Étudier la réciproque. (*On pourra considérer une matrice dont toutes les colonnes valent* $X \in \mathrm{Ker}(A)$.)

(4) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_k = \dim(\Gamma_k)$. Montrer que la suite (u_k) est croissante et qu'il existe un unique entier p tel que

$$\forall k < p, \ u_k < u_{k+1} \quad \text{et} \quad \forall k \geq p, \ u_k = u_p.$$